

ریاضی دبیرستان



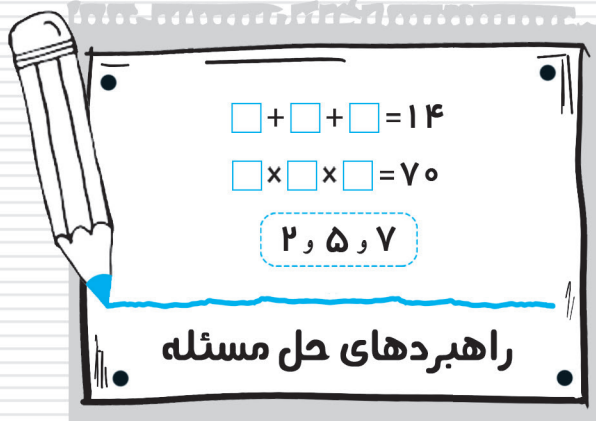
پایه هفتم

دوره اول متوسطه

- آموزش ساده و روان
- سؤال‌های امتحانی با پاسخ
- تمرین‌های طبقه‌بندی شده
- کتابی مناسب برای خانه و مدرسه

فهرست مطالب

۵	فصل ۱ - راهبردهای حل مسئله
۶	درس اول: راهبرد رسم شکل
۷	درس دوم: راهبرد الگوسازی
۹	درس سوم: راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب
۱۱	درس چهارم: راهبرد الگویابی
۱۳	درس پنجم: راهبرد حدس و آزمایش
۱۵	درس ششم: راهبرد زیرمسئله
۱۷	درس هفتم: راهبرد حل مسئله ساده‌تر
۱۹	درس هشتم: راهبرد روش‌های نمادین
۲۱	فصل ۲ - عددهای صحیح
۲۱	درس اول: معرفی عددهای علامت‌دار
۲۹	درس دوم: جمع و تفریق عددهای صحیح (۱)
۳۶	درس سوم: جمع و تفریق عددهای صحیح (۲)
۴۳	درس چهارم: ضرب و تقسیم عددهای صحیح
۵۱	فصل ۳ - جبر و معادله
۵۱	درس اول: الگوهای عددی
۵۷	درس دوم: عبارات‌های جبری
۶۴	درس سوم: مقدار عددی یک عبارت جبری
۶۹	درس چهارم: معادله
۷۶	فصل ۴ - هندسه و استدلال
۷۶	درس اول: روابط بین پاره‌خط‌ها
۸۵	درس دوم: روابط بین زاویه‌ها
۹۷	درس سوم: تبدیلات هندسی (انتقال، تقارن، دوران)
۱۰۶	درس چهارم: شکل‌های مساوی (هم‌نهشت)
۱۱۲	فصل ۵ - شمارنده‌ها و اعداد اول
۱۱۲	درس اول: عدد اول
۱۱۹	درس دوم: شمارنده اول
۱۲۵	درس سوم: بزرگ‌ترین شمارنده مشترک
۱۳۱	درس چهارم: کوچک‌ترین مضرب مشترک
۱۳۹	فصل ۶ - سطح و حجم
۱۳۹	درس اول: حجم‌های هندسی
۱۴۶	درس دوم: محاسبه حجم‌های منشوری
۱۵۳	درس سوم: مساحت جانبی و کل
۱۶۱	درس چهارم: حجم و سطح
۱۶۶	فصل ۷ - توان و جذر
۱۶۶	درس اول: تعریف توان
۱۷۵	درس دوم: محاسبه عبارت توان‌دار
۱۸۲	درس سوم: ساده کردن عبارات‌های توان‌دار
۱۹۰	درس چهارم: جذر و ریشه
۱۹۹	فصل ۸ - بردار و مختصات
۱۹۹	درس اول: پاره‌خط جهت‌دار
۲۰۶	درس دوم: بردارهای مساوی و قرینه
۲۱۰	درس سوم: مختصات
۲۱۸	درس چهارم: بردار انتقال
۲۲۸	فصل ۹ - آمار و احتمال
۲۲۸	درس اول: جمع‌آوری و نمایش داده‌ها
۲۳۳	درس دوم: نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها
۲۴۱	درس سوم: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۲۴۹	درس چهارم: احتمال و تجربه



فصل

چگونه مسئله را حل کنیم؟

هرگاه بخواهیم کاری را انجام دهیم ولی نتوانیم به نتیجه موردنظر برسیم، مسئله ایجاد می‌شود. مسئله و تلاش برای حل آن جزئی از زندگی است. حل مسئله از مفاهیم اصلی در ریاضیات است و بایستی ریاضی با حل مسئله آموزش داده شود. برای حل یک مسئله باید مراحل زیر را طی کنیم.

مرحله اول: فهمیدن مسئله

فهمیدن مسئله یعنی اطلاعات داده شده و خواسته‌های مسئله را تشخیص دهیم و ارتباط بین آنها را درک کنیم. فهمیدن مسئله بخش اصلی فرآیند حل مسئله است. اغلب دانش آموزان در درک مطلب عبارات‌های صورت مسئله، اشکال دارند. بنابراین مسئله را نمی‌فهمند و نمی‌توانند آن را حل کنند. برای فهم بهتر یک مسئله می‌توانیم کارهای زیر را انجام دهیم:

- ۱- اطلاعات داده شده مسئله را مشخص کنیم.
- ۲- خواسته‌های مسئله را مشخص کنیم.
- ۳- مسئله را به صورت خلاصه بیان کنیم.
- ۴- مسئله را با زبان و بیان خود توضیح دهیم.
- ۵- مسئله را به صورت نمایش اجرا کنیم.
- ۶- مسئله را با شکل‌ها و یا اشیاء مدل‌سازی کنیم.

مرحله دوم: انتخاب راهبرد مناسب

یعنی یک روش یا راه حل مناسب برای حل مسئله پیدا کنیم و با مرور راهبردها تشخیص دهیم که کدام یک برای حل مسئله مناسب‌تر است. گاهی در این مرحله مجبور می‌شویم به مرحله اول برگردیم تا بتوانیم یک راه حل مناسب پیدا کنیم. راهبردهای حل مسئله عبارت‌اند از:

- | | | | |
|------------------------|--------------------|--------------------------------|--------------------------|
| ۱- راهبرد رسم شکل | ۲- راهبرد الگوسازی | ۳- راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب | ۴- راهبرد الگویابی |
| ۵- راهبرد حدس و آزمایش | ۶- راهبرد زیرمسئله | ۷- راهبرد حل مسئله ساده‌تر | ۸- راهبرد روش‌های نمادین |

مرحله سوم: حل مسئله

یعنی با راهبرد مشخص شده مسئله را حل کنیم. اگر با راهبرد مشخص شده نتوانیم مسئله را حل کنیم، به مرحله دوم برگشته و راهبرد مناسب دیگری را تعیین می‌کنیم. شاید مجبور شویم برای توجه بیشتر به نکته‌ها و بخش‌هایی از مسئله به مرحله اول برگردیم.

مرحله چهارم: بازگشت به عقب

یعنی راهبرد، راه حل و پاسخ را با مشخصات مسئله مطابقت دهیم. برای این منظور می‌توان موردی زیر را بررسی کرد.

- ۱- آیا پاسخ مسئله منطقی است؟
- ۲- آیا پاسخ به دست آمده همان خواسته مسئله است؟
- ۳- آیا عملیات درست انجام شده است؟
- ۴- آیا مراحل مسئله به درستی انجام گرفته است؟
- ۵- آیا شرایط موردنظر مسئله با پاسخ مطابقت دارد؟

اکنون با راهبردهای حل مسئله و راههای فکر کردن در مورد مسئله آشنا می‌شوید.

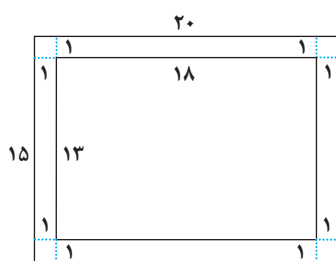
در آموزش هر راهبرد توجه کنید که مسئله‌های داده شده را فقط با همان راهبرد حل کنید تا با هر راهبرد به‌طور کامل آشنا شوید. پس از آشنایی با همه راهبردها، برای حل یک مسئله می‌توانید از هر راهبردی که مایل هستید، مسئله را حل کنید. به این ترتیب یک مسئله را می‌توانید با راهبردهای متفاوت حل کنید.

آموزش

درس اول: راهبرد رسم شکل

بهترین شروع برای حل برخی از مسئله‌ها کشیدن شکل مناسب است. رسم شکل به فهم بهتر مسئله و پیدا کردن راه حل آن کمک می‌کند. گاهی می‌توان مسئله را با کشیدن شکل مناسب به‌طور کامل حل نمود و یا راه حل درست آن را پیدا کرد. البته لزومی ندارد که جزئیات شکل یا تصویر کشیده شود، بلکه یک تصویر کلی و رسم مواردی که در مسئله ضروری است، کفایت می‌کند.

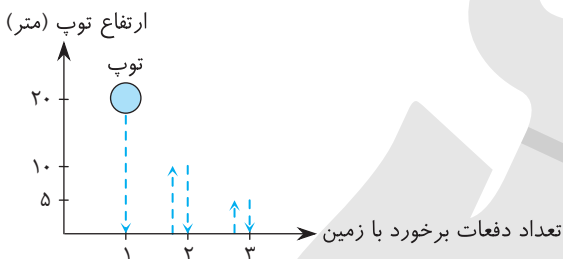
مثال ۱: عکس تولد مریم به ابعاد ۱۳ و ۱۸ سانتی‌متر است. او عکس را درون قابی قرار می‌دهد، به‌طوری که لبه‌های عکس تا لبه‌های بیرونی قاب یک سانتی‌متر فاصله دارد. محیط لبه‌های قاب عکس چند سانتی‌متر است؟



پاسخ: ابتدا یک مستطیل به عرض ۱۳ سانتی‌متر و طول ۱۸ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. دور آن به فاصله یک سانتی‌متر از هر ضلع خط می‌کشیم. یک مستطیل جدید به‌وجود می‌آید که همان قاب عکس است و سپس طول و عرض مستطیل جدید یا قاب عکس را به‌دست می‌آوریم.
 سانتی‌متر ۱۵ = عرض قاب عکس = $13 + 1 + 1$ و سانتی‌متر ۲۰ = طول قاب عکس = $18 + 1 + 1$
 سانتی‌متر ۷۰ = محیط قاب عکس = $2 \times (20 + 15) = 2 \times 35 = 70$

بنابراین محیط لبه‌های قاب عکس ۷۰ سانتی‌متر است.

مثال ۲: توپی از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین رها می‌شود و پس از زمین خوردن نصف ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. این توپ، از لحظه رها شدن تا سومین مرتبه‌ای که به زمین می‌خورد، چند متر حرکت کرده است؟



پاسخ: باتوجه به شکل می‌توان نوشت: $20 + 10 + 10 + 5 + 5 = 50$
 بنابراین این توپ ۵۰ متر حرکت کرده است.

سؤال‌های امتحانی با پاسخ

درس اول: راهبرد رسم شکل

۱- نرگس عکس تولدش که ابعاد آن ۱۰ و ۱۵ سانتی‌متر است را درون قابی به ابعاد ۱۶ و ۲۴ سانتی‌متر قرار داده است. شیشه قاب عکس دقیقاً اندازه عکس می‌باشد. مساحت لبه‌های قاب عکس چند سانتی‌متر مربع است؟

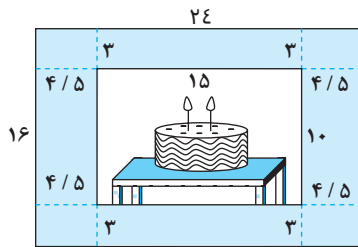
۲- $\frac{1}{3}$ ظرفی پر از آب است. اگر ۳۰ لیتر دیگر آب به آن اضافه شود، فقط $\frac{1}{5}$ ظرف خالی خواهد ماند. ظرفیت کل این ظرف چند لیتر است؟

۳- حلزونی پایین درخت ۸ متری قرار دارد. اگر هر روز ۲ متر به طرف بالا حرکت کند و هنگام شب ۵/۰ متر به سمت پایین لیز بخورد، این حلزون روز چندم به بالای درخت می‌رسد؟

۴- آیا دو کسر $\frac{3}{8}$ و $\frac{6}{8}$ باهم مساوی‌اند؟ با رسم شکل نشان دهید.

پاسخ سؤال‌ها

۱- باتوجه به رسم شکل فرضی مقابل، داریم:



سانتی متر مربع $15 \times 10 = 150$ = مساحت شیشه قاب

سانتی متر مربع $24 \times 16 = 384$ = مساحت کل قاب

سانتی متر مربع $384 - 150 = 234$ = مساحت لبه های قاب (قسمت رنگی)

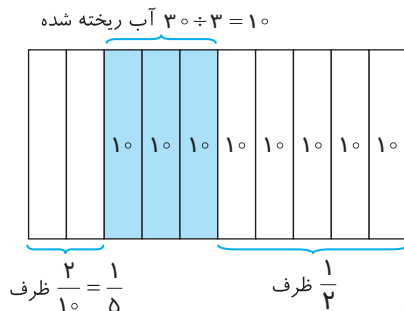
۲- باتوجه به اطلاعات مسئله شکل مقابل را رسم می کنیم.

ابتدا مخرج ها را یکی می کنیم.

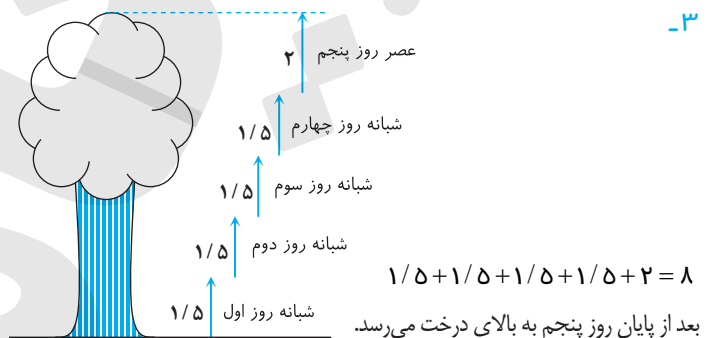
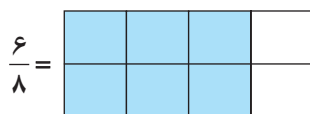
$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} \rightarrow \text{نصف ظرف}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \rightarrow \text{قسمت خالی مانده}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000} = 100 \text{ لیتر}$$



۴- باتوجه به شکل های رسم شده مشاهده می شود که قسمت رنگ شده در هر دو شکل باهم برابر است، پس $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ می باشد.



درس دوم: راهبرد الگوسازی

آموزش

گاهی برای حل یک مسئله حالت های متفاوتی وجود دارد. منظم نوشتن حالت های ممکن یا راه حل مسئله به طور منطقی به ما کمک می کند تا همه حالت ها را در نظر بگیریم و حالتی از قلم نیفتد. برای این منظور می توان از جدول استفاده کرد. این راهبرد برای نوشتن تمام پاسخ های ممکن برای مسئله و دسته بندی کردن و نظم دادن به تعداد زیادی داده و همچنین مشخص شدن رابطه داده ها و بخش هایی از راه حل بسیار مؤثر است.

مثال ۱: با رقم های ۳، ۴ و ۷ تمام عددهای سه رقمی ممکن را بنویسید.

(در عددها می تواند رقم های تکراری هم باشد)

پاسخ: ابتدا صدگان را عدد ۴ قرار می دهیم و طبق جدول مقابل می بینیم که اگر صدگان ۴ باشد، ۹ حالت یا ۹ عدد سه رقمی می توانیم بنویسیم. حال اگر صدگان ۳ باشد، به همان ترتیب ۹ حالت دیگر هم داریم و در آخر با صدگان ۷ هم ۹ حالت خواهیم داشت. پس در کل ۲۷ حالت یا ۲۷ عدد سه رقمی با تکرار رقم ها می توان نوشت.

یکان	دهگان	صدگان
۷	۳	۴
۳	۷	۴
۳	۳	۴
۷	۴	۴
۴	۷	۴
۴	۳	۴
۳	۴	۴
۷	۷	۴
۴	۴	۴

$$\square + \triangle = 20$$

مثال ۲: اگر به جای $\square$ و $\triangle$ عدد طبیعی قرار گیرد، به چند حالت عبارت مقابل برقرار است؟

در کدام حالت $\square \times \triangle$ بیشترین مقدار است؟

حاصل ضرب	$\triangle$	$\square$	حاصل ضرب	$\triangle$	$\square$
۸۴	۱۴	۶	۱۹	۱۹	۱
۹۱	۱۳	۷	۳۶	۱۸	۲
۹۶	۱۲	۸	۵۱	۱۷	۳
۹۹	۱۱	۹	۶۴	۱۶	۴
۱۰۰	۱۰	۱۰	۷۵	۱۵	۵

پاسخ: تمام حالت‌هایی که حاصل جمع دو عدد طبیعی برابر با ۲۰ می‌شود را در جدول می‌نویسیم. چون اعداد باید طبیعی باشند، از عدد ۱ شروع می‌کنیم و در هر مرحله دومین عدد را طوری انتخاب می‌کنیم که عبارت برقرار باشد. به ۱۰ حالت عبارت برقرار است و در حالتی که هر دو عدد طبیعی برابر با ۱۰ باشند، حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار است.

در جدول بالا، اگر عددهای بزرگ‌تر از ۱۰ را انتخاب کنیم، حالت‌های تکراری به وجود می‌آید.

درس دوم: راهبرد الگوسازی

سؤال‌های امتحانی با پاسخ

- ۱- دو عدد طبیعی بنویسید که حاصل ضربشان ۳۶ و مجموعشان کمترین مقدار باشد.
- ۲- با اسکناس‌های ۵۰۰ و ۱۰۰۰ تومانی به چند حالت می‌توان ۴۵۰۰ تومان را درست کرد؟
- ۳- با انگشتان دو دست به چند طریق می‌توان عدد ۵ را نشان داد؟ (برای نشان دادن هر عدد با یک دست از یک حالت استفاده شود)
- ۴- دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضربشان ۳۲ و حاصل جمع آنها بیشترین مقدار ممکن باشد. (تهران، منطقه ۱۷، دبیرستان پیرنظر - خرداد ۹۷)
- ۵- با سه رقم ۶، ۰ و ۸ تمام عددهای سه رقمی ممکن را بنویسید. (بدون تکرار رقم‌ها)

پاسخ سؤال‌ها

جمع	ضرب	عدد دوم	عدد اول
$1 + 36 = 37$	$1 \times 36 = 36$	۳۶	۱
$2 + 18 = 20$	$2 \times 18 = 36$	۱۸	۲
$3 + 12 = 15$	$3 \times 12 = 36$	۱۲	۳
$4 + 9 = 13$	$4 \times 9 = 36$	۹	۴
$6 + 6 = 12$	$6 \times 6 = 36$	۶	۶

۱- چون گفته شده عددهای طبیعی پس از عدد ۱ شروع می‌کنیم و تمام عددهایی را که حاصل ضربشان ۳۶ می‌شود را می‌نویسیم و سپس هر دو عدد را باهم جمع می‌کنیم و در حالتی که هر دو عدد طبیعی برابر با ۶ باشند، مجموعشان کمترین مقدار است.

۲- طبق جدول مقابل متوجه می‌شویم که پنج حالت داریم.

مبلغ	۱۰۰۰	۵۰۰
$9 \times 500 = 4500$	۰	۹
$(7 \times 500) + (1 \times 1000) = 4500$	۱	۷
$(5 \times 500) + (2 \times 1000) = 4500$	۲	۵
$(3 \times 500) + (3 \times 1000) = 4500$	۳	۳
$(1 \times 500) + (4 \times 1000) = 4500$	۴	۱

انگشت دست راست	۵	۴	۳	۲	۱	۰
انگشت دست چپ	۰	۱	۲	۳	۴	۵

۳- در اینجا تعداد انگشتان استفاده شده در هر دست مهم است. باتوجه به اینکه هر دست ۵ انگشت دارد، پس مشاهده می شود که به شش حالت می توان این کار را انجام داد.

جمع	ضرب	عدد دوم	عدد اول
$1 + 32 = 33$	$1 \times 32 = 32$	۳۲	۱
$2 + 16 = 18$	$2 \times 16 = 32$	۱۶	۲
$4 + 8 = 12$	$4 \times 8 = 32$	۸	۴

۴- ابتدا تمام عددهایی که ضرب آنها ۳۲ می شود را می نویسیم و سپس آنها را جمع می کنیم و جمع هر کدام بیشترین مقدار بود، جواب سؤال می باشد. طبق جدول مقابل متوجه می شویم دو عدد موردنظر ۱ و ۳۲ می باشند. چون جمع آنها بیشترین مقدار است.

یکان	دهگان	صدگان
۸	۰	۶
۰	۸	۶
۶	۰	۸
۰	۶	۸

۵- باتوجه به سؤال چون ارقام نباید تکرار شوند، پس در کل چهار حالت داریم. دقت کنید صدگان صفر هم نمی تواند باشد. اگر در صدگان صفر قرار بگیرد دیگر عدد سه رقمی نیست.

درس سوم: راهبرد حذف حالت های نامطلوب

آموزش

برای بعضی مسئله ها پاسخ های مختلفی را می توان در نظر گرفت که برخی پاسخ ها نادرست و نامطلوب و برخی مطلوب هستند. اگر با دلایل منطقی حالت های نامطلوب را حذف کنیم، پاسخ های احتمالی محدود می شود و می توانیم به خواسته مسئله برسیم.

برای نوشتن تمام حالت های ممکن می توان از جدول و از راهبرد الگوسازی استفاده نمود.

مثال: مجموع سه عدد طبیعی ۳۶ و حاصل ضرب آنها ۶۶ است. بزرگ ترین عدد چند است؟

پاسخ: تمام حالت هایی که حاصل ضرب سه عدد طبیعی ۶۶ می شود را در جدول می نویسیم و سپس با جمع هر سه عدد به پاسخ درست و مطلوب مسئله می رسیم.

مجموع	ضرب	عدد سوم	عدد دوم	عدد اول
۶۸	$1 \times 1 \times 66 = 66$	۶۶	۱	۱
۳۶	$1 \times 2 \times 33 = 66$	۳۳	۲	۱
۲۶	$1 \times 3 \times 22 = 66$	۲۲	۳	۱
۱۸	$1 \times 6 \times 11 = 66$	۱۱	۶	۱
۱۶	$2 \times 3 \times 11 = 66$	۱۱	۳	۲

حالت مطلوب →

باتوجه به جدول مقابل و یافتن حالت مطلوب، پاسخ مسئله (بزرگ ترین عدد) ۳۳ است.

مثال: کدام یک از زاویه های زیر متمم زاویه ۳۷ درجه است؟

☐ (د) ۳۵°

☐ (ج) ۵۳°

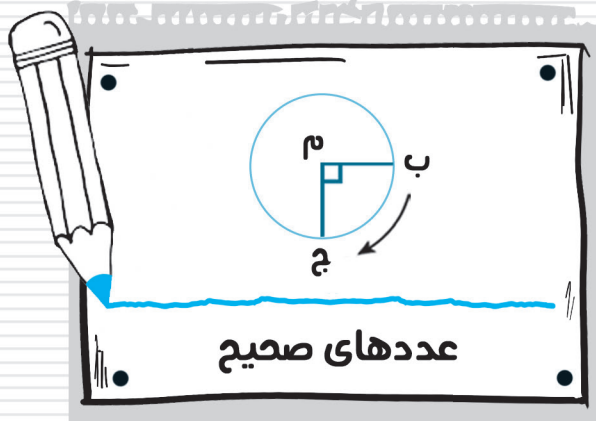
☐ (ب) ۳۴°

☐ (الف) ۴۳°

پاسخ: در این حالت همه گزینه ها را آزمایش می کنیم.

(دو زاویه متمم مجموعشان ۹۰° است. پس تنها حالت مطلوب همان ۵۳° است)

$43^\circ + 37^\circ = 80^\circ$ ✗	$53^\circ + 37^\circ = 90^\circ$ ✓
$34^\circ + 37^\circ = 71^\circ$ ✗	$35^\circ + 37^\circ = 72^\circ$ ✗



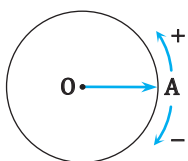
فصل

درس اول: معرفی عددهای علامت دار

آموزش

در بسیاری از مواقع در زندگی روزمره از کلمه‌هایی مانند: بیشتر، گرم‌تر، طلبکاری، ارتفاع، بالاتر و ... (مثبت‌ها) و کمتر، سردتر، بدهکاری، عمق، پایین‌تر و ... (منفی‌ها) استفاده می‌کنیم. برای نمایش این مفاهیم در ریاضی از علامت « + » برای مثبت‌ها و علامت « - » برای منفی‌ها در مقایسه با یک مبدأ (صفر) استفاده می‌کنیم.

کاربرد عدد صحیح در هندسه

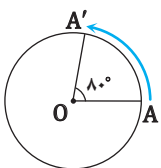


نشان دادن یک زاویه با یک عدد علامت‌دار: تصور کنید یک دایره مقوایی مانند شکل مقابل ساخته‌ایم و روی مرکز دایره یک عقربه نازک مقوایی با پونز چسبانده‌ایم. وقتی عقربه روی شعاع OA قرار دارد، زاویه صفر درجه را برای ما نشان می‌دهد. (که مبدأ فرض می‌شود)

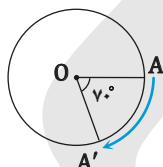
زاویه منفی: حرکت عقربه کاغذی موافق حرکت عقربه‌های ساعت به زاویه بین عقربه کاغذی و شعاع OA علامت منفی می‌دهد. (ساعت‌گرد)

زاویه مثبت: حرکت عقربه کاغذی مخالف حرکت عقربه‌های ساعت به زاویه بین عقربه کاغذی و شعاع OA علامت مثبت می‌دهد. (پادساعت‌گرد)

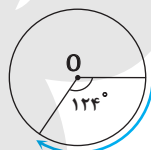
مثال: زاویه‌های زیر را با یک عدد علامت‌دار نمایش دهید.



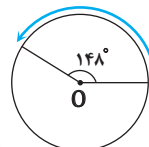
$$\widehat{AOA'} = \widehat{O} = +8^\circ$$



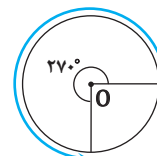
$$\widehat{AOA'} = \widehat{O} = -7^\circ$$



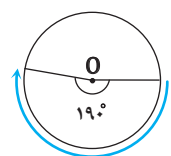
$$\widehat{O} = -124^\circ$$



$$\widehat{O} = +148^\circ$$



$$\widehat{O} = +27^\circ$$



$$\widehat{O} = -19^\circ \text{ پاسخ}$$

معرفی محور اعداد صحیح

اگر عددهای مثبت، منفی و صفر را بر روی محور عددها نمایش دهیم به آن، محور عددهای صحیح می‌گویند. عددهای صحیح به سه دسته تقسیم شده‌اند.

۱- عددهای صحیح مثبت (سمت راست صفر)

۲- عددهای صحیح منفی (سمت چپ صفر)

۳- صفر (مبدأ)



مجموعه (خانواده یا دسته) عددهای صحیح را با $\mathbb{Z}$ (اول کلمه آلمانی Zahlen به معنی صحیح) نمایش می‌دهیم.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

مجموعه عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم. (اول کلمه انگلیسی Natural به معنی طبیعی)
 $\mathbb{N} = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots\}$
 مجموعه عددهای حسابی را با $\mathbb{W}$ یا $\mathbb{I}$ نمایش می‌دهیم.
 $\mathbb{I} = \mathbb{W} = \{0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots\}$

قرینه اعداد صحیح

باتوجه به محور عددهای صحیح می‌بینیم که عددهایی مانند $+2$ و -2 یا -4 و $+4$ و ... هر دو عدد، از مبدأ (صفر) به یک فاصله هستند، با این تفاوت که یکی در سمت راست صفر و دیگری در سمت چپ صفر قرار گرفته‌اند. به این نوع عددها، عددهای قرینه می‌گویند و می‌خوانیم $+2$ قرینه -2 است. (و بالعکس، -2 قرینه $+2$ است)

عددهای صحیح منفی و عددهای صحیح مثبت قرینه یکدیگرند. (مانند $+1$ و -1 یا $+5$ و -5 و ...)
 قرینه عدد صفر خودش می‌باشد.

فاصله هر عدد صحیح با قرینه‌اش دو برابر آن عدد صحیح می‌باشد.

در عمل قرینه کردن عددها یکسان هستند، علامت‌ها متفاوت می‌باشند.

نماد قرینه کردن: در ریاضی قرینه را با علامت « $-$ » نشان می‌دهیم و «قرینه» می‌خوانیم.

مثال: قرینه عددهای مقابل را بنویسید.
 الف) -3 قرینه $-3 = -(-3) = +3$ ب) $+2$ قرینه $+2 = -(+2) = -2$

قرینه قرینه هر عدد برابر با خود عدد است.
مثال: حاصل عبارت‌های مقابل را به دست آورید.
 الف) $-[-(-9)] = -[+9] = -9$ ب) $-[-(+13)] = -[-13] = +13$

هرگاه تعداد قرینه کردن‌ها فرد باشد، عدد صحیح (اولیه) قرینه می‌شود.

مثال: حاصل عبارت‌های مقابل را به دست آورید.
 الف) $-[-(-(+6))] = -6$ ب) $-[-[-(-5)]] = +5$

هرگاه تعداد قرینه کردن‌ها زوج باشد، عدد صحیح (اولیه) تغییر نمی‌کند.

مثال: حاصل عبارت‌های مقابل را به دست آورید.
 الف) $-[-[-(-(+7))]] = +7$ ب) $-[-[-[-(-8)]]] = -8$

عددهای صحیح مثبت همان عددهای طبیعی هستند.

مثال: عددهای مقابل را به ساده‌ترین شکل بنویسید.
 الف) $+27 = 27$ ب) $+3 = 3$

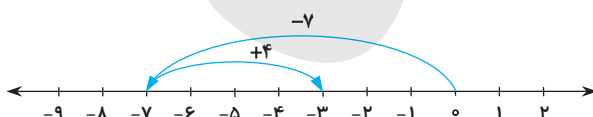
حاصل جمع اعداد صحیح به کمک محور

برای یافتن حاصل جمع عددهای صحیح می‌توان متناظر با هر عدد صحیح به ترتیب حرکت‌ها را روی محور رسم نموده و پاسخ را به کمک مکان انتهایی آخرین حرکت به دست آورد.

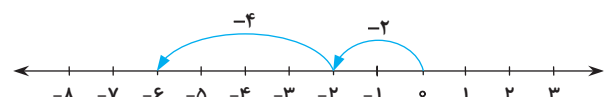
برای یافتن حاصل جمع به کمک محور باید اولین حرکت را از صفر (مبدأ) شروع کنیم.

مثال: حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید. (به کمک محور)

الف) $(-7) + (+4) = -3$



ب) $(-2) + (-4) = -6$



حاصل تفریق اعداد صحیح به کمک محور

تفریق تبدیل به جمع می‌شود

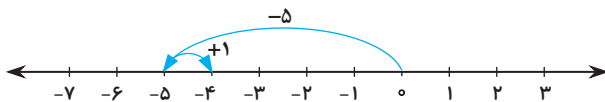
$$\square - \bigcirc = \square + \bigcirc$$

عدد دوم را قرینه می‌کنیم عدد اول خودش

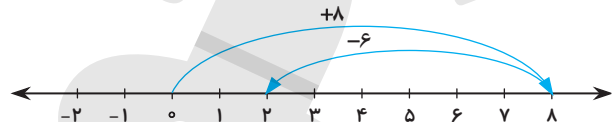
برای به دست آوردن حاصل یک تفریق و یا رسم حرکت متناظر با تفریق عددهای صحیح باید تفریق را به روش مقابل به جمع تبدیل نمود و سپس مانند جمع اقدام کرد. (مربع و دایره هر عدد صحیحی می‌توانند باشند)

مثال: حاصل تفریق‌های زیر را به کمک محور به دست آورید.

الف) $(-5) - (-1) = -5 + (+1) = -4$



ب) $(+8) - 6 = (+8) + (-6) = +2$

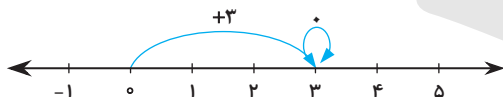


جمع عدد صحیح با صفر

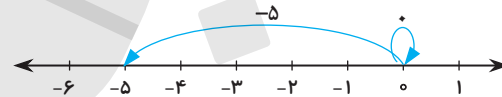
حاصل جمع هر عدد صحیح با صفر برابر با خود آن عدد است.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به کمک محور به دست آورید.

الف) $+3 + 0 = +3$



ب) $0 + (-5) = -5$

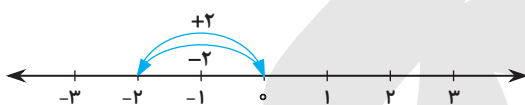


جمع عدد صحیح با قرینه‌اش

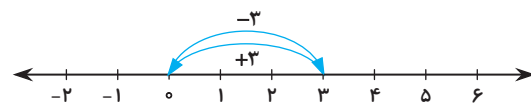
حاصل جمع هر عدد صحیح با قرینه‌اش برابر با صفر است.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به کمک محور به دست آورید.

الف) $-2 + (+2) = 0$



ب) $+3 + (-3) = 0$



مقایسه اعداد صحیح

هر عدد صحیح مثبت از صفر بزرگ‌تر است.

هر عدد صحیح منفی از صفر کوچک‌تر است.

بر روی محور عددهای صحیح هرچه به سمت راست پیش برویم، عددها بزرگ‌تر می‌شوند و هرچه به سمت چپ پیش برویم، عددها کوچک‌تر می‌شوند.

بر روی محور عددهای صحیح همیشه عددی که سمت راست قرار می‌گیرد، بزرگ‌تر است.

مثال: در جاهای خالی، علامت مناسب > ، = و یا < بگذارید.

الف) $-401 \square -118 \Rightarrow -401 < -118$

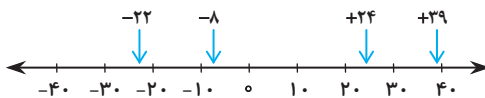
ب) $-93 \square -930 \Rightarrow -93 > -930$

نمایش اعداد صحیح به طور تقریبی روی محور اعداد

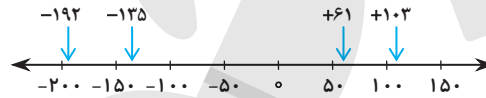
گاهی اوقات برای یافتن حاصل تقریبی یک عبارت ریاضی لازم است مکان تقریبی عددهای صحیح را در نظر بگیریم. برای نشان دادن مکان تقریبی یک عدد صحیح روی محور (اعداد صحیح) با توجه به واحد بندی محور و در نظر گرفتن وسط هر واحد (روی محور) و علامت عدد مورد نظر می توان اقدام کرد.

مثال: عددهای زیر را به طور تقریبی روی محور نشان دهید.

الف) $24+$ و -8 و $39+$ و -22



ب) -192 و 103 و -135 و $61+$



درس اول: معرفی عددهای علامت دار

سؤال های امتحانی با پاسخ

۱- جمله های درست را با «✓» و جمله های نادرست را با «✗» مشخص کنید.

- | | |
|--|--|
| ☐ الف، هر عدد صحیح یک عدد طبیعی می باشد. | ☐ ب، تمام عددهای صحیح از صفر بزرگتر هستند. |
| ☐ پ، قرینه قرینه هر عدد با خود آن عدد، برابر است. | ☐ ت، بزرگترین عدد صحیح منفی، (-1) می باشد. |
| ☐ ث، کوچکترین عدد صحیح منفی، برابر با (-1) می باشد. | ☐ ج، قرینه هر عدد از خود آن عدد کوچکتر است. |
| ☐ چ، صفر از هر عدد صحیح مثبت کوچکتر است. | ☐ ح، هر عدد صحیح مثبت، از هر عدد صحیح منفی، بزرگتر است. |

۲- هریک از جمله های زیر را با يك عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

- | | |
|--|--|
| الف، عددهای صحیح دسته می شوند. | ب، هر عدد صحیح منفی از صفر است. |
| پ، عددهای صحیح مثبت همان عددهای هستند. | ت، عدد -25 از قرینه اش است. |
| ث، قرینه قرینه عدد $+3$ برابر است با | ج، جمع هر عدد با برابر با صفر است. |
| چ، جمع هر عدد با صفر برابر می باشد. | ح، تنها عدد صحیح که قرینه اش با خودش برابر است، عدد می باشد. |

۳- روی يك محور در نقطه صفر، جهندهای ابتدا ۱۵ واحد به سمت چپ و سپس ۹ واحد به سمت راست حرکت کرده است. برای اینکه بر روی مبدأ بایستد، چه حرکتی را باید انجام دهد؟

- ☐ الف) ۹- ☐ ب) ۶+ ☐ ج) ۱۵+ ☐ د) ۶-

۴- عبارتهای زیر را به صورت يك عدد علامتدار بنویسید.

- | | |
|--|--|
| الف) ساعت ۸ بعد از ظهر | ب) دمای ۴ درجه زیر صفر |
| پ) ۳۷۵۰۰ تومان بدهکاری | ت) صدفی در عمق ۷۶ متری ته دریا قرار دارد. |
| ث) مرغ دریایی که در ارتفاع $16/5$ متری سطح دریا پرواز می کند. | |

۵- مکان عددهای علامتدار روبه رو را روی محور عددها مشخص کنید.

$$-\frac{7}{4} \text{ و } -1\frac{1}{3} \text{ و } \frac{4}{8} \text{ و } +\frac{16}{4}$$

۶- عبارتهای زیر را به زبان ریاضی نوشته و سپس پاسخ دهید. (يك نتیجه کلی بیان کنید)

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| = قرینه قرینه (-23) (ب) | = قرینه $(+16)$ (الف) |
| = قرینه قرینه قرینه قرینه $(+30)$ (ت) | = قرینه قرینه قرینه (-45) (پ) |

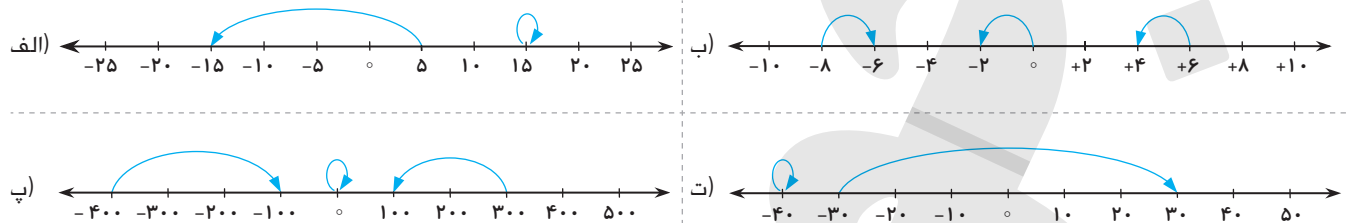
۷- دور عددهای صحیح خط بکشید.

$$-2 \text{ و } 0 \text{ و } 75/0 \text{ و } +3 \text{ و } 5$$

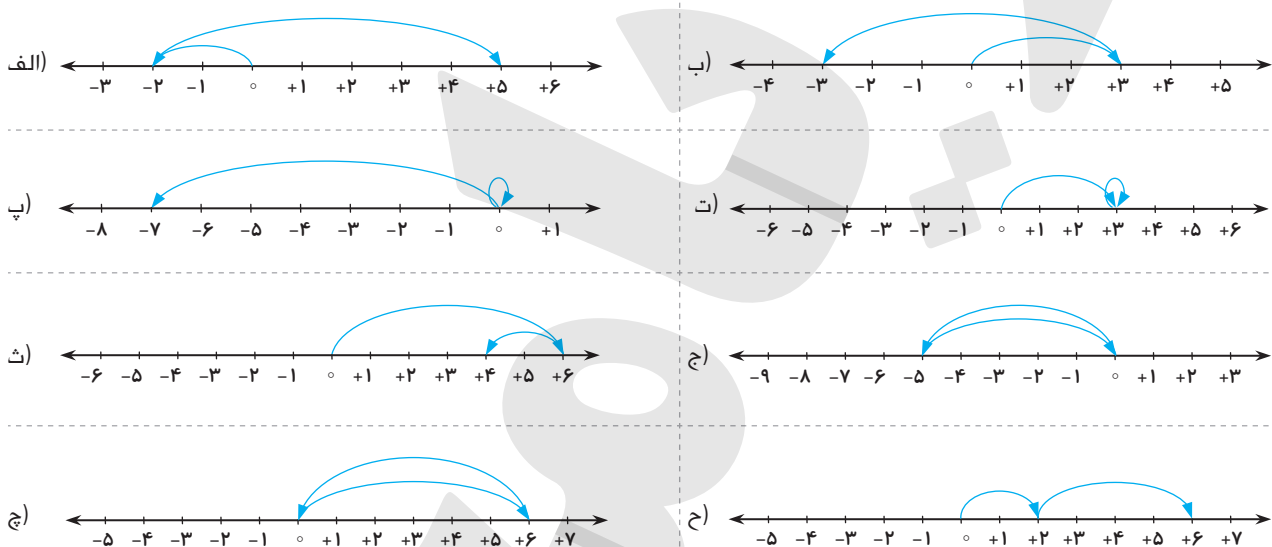
۸- ساده‌ترین صورت عبارتهای زیر را بنویسید.

الف) $-(+2) =$	ب) $+(-2) =$	پ) $-(-5) =$	ت) $+(-+(-6))) =$
ث) $+(+7) =$	ج) $-(-(+4)) =$	چ) $-(-(-21)) =$	ح) $-(+(-(-8))) =$

۹- برای هر حرکت روی محور، یک عدد علامتدار بنویسید.



۱۰- برای هریک از محورهای زیر یک جمع بنویسید.



۱۱- برای هریک از جمعهای زیر یک محور با حرکتهای متناظر آن رسم کرده و سپس حاصل را بنویسید.

الف) $(+4) + (+6) =$	ب) $(-8) + (-3) =$	پ) $(+7) + (-5) =$
ت) $(+2) + (-9) =$	ث) $(-4) + 0 =$	ج) $(-4) + (+4) =$

۱۲- ابتدا تفریقها را به صورت جمع نوشته و سپس با کمک محور حاصل را به دست آورید.

الف) $+9 - (-2) =$	ب) $-7 - (-3) =$	پ) $-1 - (+6) =$
ت) $+5 - (-8) =$	ث) $-4 - (+2) =$	ج) $-5 - 3 =$

۱۳- حاصل جمع و تفریقهای زیر را به کمک محور به دست آورید و یک نتیجه کلی بیان کنید. (ابتدا تفریقها را به جمع تبدیل کنید)

الف) $0 + (-3) =$	ب) $0 - (-7) =$	پ) $+4 + 0 =$
ت) $(+2) + 0 =$	ث) $(-8) - 0 =$	ج) $+2 - 2 =$

۱۴- ابتدا تفریق‌های زیر را به جمع تبدیل کنید و سپس حاصل را به دست آورید.

الف) $(+75) - (+50) =$

ب) $(-20) - (-13) =$

پ) $(-23) - (-40) =$

ت) $(-3) - (+4) =$

ث) $(+9) - (-14) =$

ج) $(+12) - (-3) =$

۱۵- در داخل ☐ علامت مناسب $>$ ، $=$ و یا $<$ قرار دهید.

الف) $-2 \square -8$

ب) $(-8) \square -(+8)$

پ) $0 \square -3 + 3$

ت) $-19 \square +1$

ث) $-12 \square -5$

ج) $-8 \square 0$

چ) $+25 - 25 \square 0$

ح) $+5 \square +2$

خ) $+5 \square 0$

د) $+15 \square 15$

ذ) $-(-6) \square -6$

ر) $+2 \square -10$

۱۶- در داخل ☐ علامت مناسب $>$ ، $=$ و یا $<$ قرار دهید.

الف) $0 - 18 \square -18 + 0$

ب) $0 + (-30) \square -(-(-3))$

پ) $-(-(-(-7))) \square -(-(-0))$

۱۷- در داخل ☐ عدد مناسب قرار دهید.

الف) $-(-(+(-(+ \square))))) = -12$

ب) $+(-(-(-(- \square))))) = +5$

پ) $-(+(-(+(-(+ \square))))) = +6$

۱۸- گسترده عددهای صحیح زیر را بنویسید.

الف) $+1392 =$

ب) $-4080 =$

پ) $+503 =$

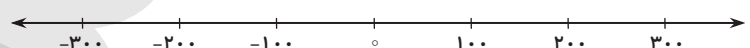
ت) $-673 =$

ث) $+25025 =$

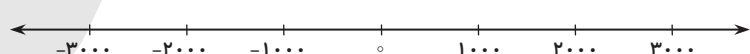
ج) $-92521 =$

۱۹- هر دسته از عددهای زیر را به طور تقریبی روی محور نشان دهید.

الف) -256 و 240 و $+10$ و -85



ب) -2200 و $+2750$ و -1500 و 250



۲۰- در بازی هُب در چندین مرحله، هنگامی که حسین، آرش و یزدان عددها را می‌گویند، سیاوش آنها را می‌نویسد. بعضی از عددها را سیاوش جا انداخته است. آنها را کامل کنید.

الف) و -17 و ب) و 2508 و ج) و -1003 و

ت) و -4016 و ث) و -587 و ج) و -1003 و

۲۱- قطعه چوبی به طول ۱۴ متر را به طور قائم (عمودی) در منبع پر از آب فرو کردیم. ۳ متر از چوب، خارج از آب قرار گرفت. ارتفاع دو سر چوب را نسبت به سطح آب با عددهای صحیح نمایش دهید.

۲۲- يك كَك (قهرمان پرش) روی محور عددهای صحیح در حال پرش است. اندازه حرکتهای او را در جاهای خالی به گونه‌ای بنویسید که تساوی‌ها درست باشند.

الف) $-10 + \dots = -50$

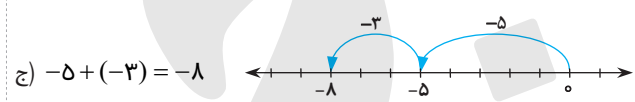
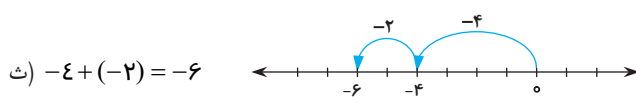
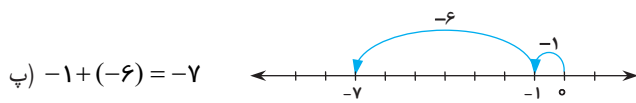
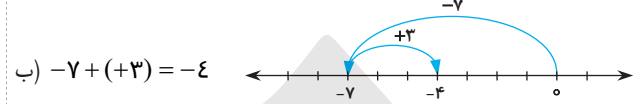
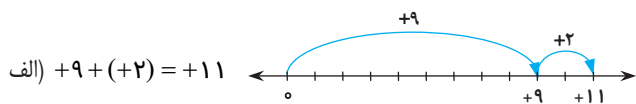
ب) $+30 + \dots = +10$

پ) $\dots + 60 = -40$

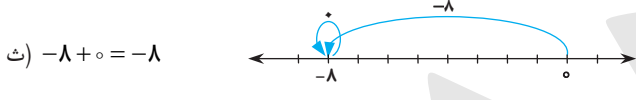
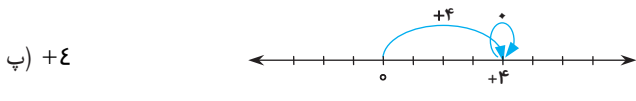
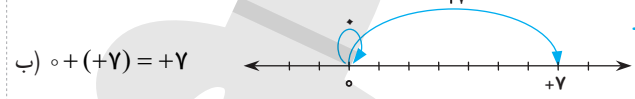
پاسخ سؤال‌ها

الف) $\times$	ب) $\times$	پ) $\checkmark$	ت) $\checkmark$	ث) $\times$ کوچکترین عدد صحیح منفی را نمی‌توان مشخص کرد.
ج) $\times$ قرینه هر عدد مثبت از خود آن عدد کوچکتر است.	ج) $\checkmark$	ج) $\checkmark$		
۲- الف) سه (مثبت، منفی و صفر)	ب) کوچکتر	پ) طبیعی	ت) کوچکتر $(-25 < +25)$	ث) $+3$ (خود آن عدد)
ج) قرینه‌اش	ج) با خود آن عدد	ح) صفر		
۳- ب				
				پانزده واحد به سمت چپ $\rightarrow -15$ و نه واحد به سمت راست $\rightarrow +9$ برای اینکه بر روی مبدأ بایستد، باید شش واحد به سمت راست حرکت کند. $\rightarrow +6$
۴- الف) $+8$	ب) -4	پ) -37500	ت) -76	ث) $+16/5$
۵- $+4 = +\frac{16}{4}$ و $-\frac{1}{3} = -\frac{4}{12}$ و $4/8 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ و $-\frac{1}{3} = -\frac{4}{12}$				
۶- $3 = -(-(-(-(+3))))$ و $45 = -(-(-(-(-45))))$	ب) $-(-(-23)) = -23$	الف) $-(+16) = -16$		
اگر تعداد قرینه کردن‌ها زوج باشد، حاصل خود آن عدد می‌شود و اگر تعداد قرینه کردن‌ها فرد باشد، حاصل قرینه عدد موردنظر خواهد بود.				
۷- 5 و 3 و 75 و 0 و -2				
۸- در تمامی قسمت‌ها از علامت مثبت می‌توان چشم‌پوشی کرد.	پ) $+5 = 5$	ب) -2	الف) -2	
ح) $-(-(-(-8))) = -(+8) = -8$	ج) $-(+21) = -21$	ا) $-(-4) = +4$	ت) 7	ث) $-(-6) = +6 = 6$
۹- ب				
۱۰- ا) $3 + 0 = +3$	ت) $0 + (-7) = -7$	ب) $3 + (-6) = -3$	الف) $-2 + (+7) = +5$	
ح) $2 + (+4) = +6$	ج) $+6 + (-6) = 0$	ث) $-5 + (+5) = 0$	ت) $(+6) + (-2) = +4$	
در نوشتن جمع متناظر با محورها و حرکت‌ها می‌توان عدد اول را هم با پرانتز و هم بدون پرانتز نوشت. در خلاصه‌نویسی نیز می‌توان از علامت‌های $+$ حرکت‌ها، چشم‌پوشی کرد.				
۱۱- ب) $-8 + (-3) = -11$				
ت) $2 + (-9) = -7$				
ج) $-4 + 4 = 0$				

۱۲-



۱۳-



نتیجه: حاصل جمع هر عدد صحیح با صفر همان عدد می شود و حاصل جمع هر عدد صحیح با قرینه اش همیشه برابر با صفر می شود.

الف) $+75 + (-50) = +25$

ب) $-20 + (+13) = -7$

پ) $-40 + (+23) = -17$

۱۴-

ت) $-3 + (-4) = -7$

ث) $+9 + (+14) = +23$

ج) $+12 + (+3) = +15$

۱۵- ر) $>$ د) $=$ ذ) $>$ ح) $>$ چ) $=$ ج) $<$ ث) $<$ ت) $<$ پ) $=$ ب) $=$ الف) $>$

الف) $0 + (-18) = -18 + (0) = -18$

ب) $-30 < -(+3) = -3$

پ) $-(+7) = -7 < -(0) = 0$

۱۶-

الف) $-(-(+(-(+ \square)))) = -(-(-\square)) = -(+\square) = -\square = -12 \Rightarrow \square = 12$

۱۷-

ب) $+(-(-(-(-\square)))) = -(-(+\square)) = -(-\square) = +\square = +5 \Rightarrow \square = 5$

پ) $-(-(+(-(-(+\square)))) = -(-(-\square)) = -(+\square) = -\square = +6 \Rightarrow -\square = +6 \Rightarrow \square = -6$

الف) $+1000 + 300 + 90 + 2$

ب) $-4000 - 80$

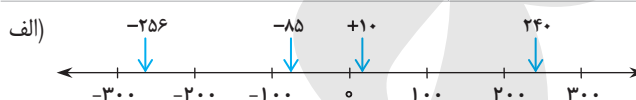
پ) $+500 + 3$

۱۸-

ت) $-600 - 70 - 3$

ث) $+20000 + 5000 + 20 + 5$

ج) $-90000 - 2000 - 500 - 20 - 1$



۱۹-

الف) 727 و 728 و 729 و 730

ب) 2507 و 2508 و 2509 و 2510

پ) -18 و -17 و -16

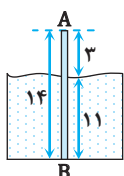
۲۰-

ت) -4017 و -4016 و -4015

ث) -588 و -587 و -586

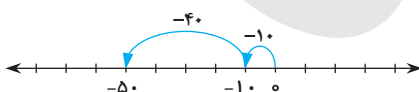
ج) -1004 و -1003 و -1002 و -1001

۲۱-



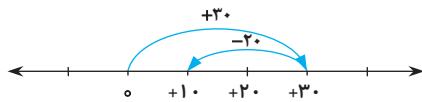
$A = +3$

$B = -11$

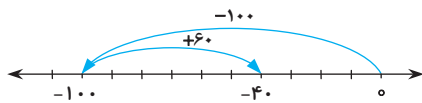


۲۲- الف) چون حرکت اول ۱۰ واحد به سمت چپ بوده و انتهای حرکت دوم نیز ۵۰- است، پس باید در

حرکت دوم نیز، ۴۰ واحد به سمت چپ حرکت کند. $\dots\dots\dots = -40$



ب) در حرکت اول ۳۰ واحد به سمت راست رفته است. با توجه به اینکه انتهای حرکت دوم روی عدد ۱۰+ است، پس باید در حرکت دوم، ۲۰ واحد به سمت چپ حرکت کند. $\dots\dots\dots = -20$



پ) حرکت دوم ۶۰ واحد به سمت راست بوده که به عدد ۰-۴ ختم شده است. پس باید حرکت اول از مبدأ ۱۰۰ واحد به سمت چپ حرکت کرده باشد تا یک تساوی برقرار شود. $\dots\dots\dots = -100$

درس دوم: جمع و تفریق عددهای صحیح (۱)

آموزش

به طور قراردادی اگر هر $\bigcirc$ (دایره توخالی) را یک عدد صحیح مثبت و هر $\bullet$ (دایره توپر) را یک عدد صحیح منفی در نظر بگیریم، پس $\bigcirc \bullet$ برابر با صفر (خنثی) می باشد.

در بعضی مواقع با توجه به صورت سؤال قرارداد عوض می شود و $\bullet = +1$ و $\bigcirc = -1$ در نظر گرفته می شود.

مثال: عددهای زیر را با دایره های توپر و توخالی نمایش دهید. ($\bullet = -1$ و $\bigcirc = +1$)

الف) $+3$ شکل $\bigcirc \bigcirc \bigcirc$

ب) -4 شکل $\bullet \bullet \bullet \bullet$

جمع و تفریق عددهای صحیح به کمک شکل (دایره های توپر و توخالی)

برای به دست آوردن حاصل جمع عددهای صحیح، متناظر با عدد مثبت تعدادی دایره توخالی و متناظر با عدد منفی تعدادی دایره توپر رسم کرده و سپس هر دایره توپر را با یک دایره توخالی صفر در نظر گرفته و در ذهن حذف می کنیم. آنچه باقی خواهد ماند، پاسخ عملیات جمع است.

برای یافتن حاصل تفریق عددهای صحیح باید آن را به جمع تبدیل کرده و سپس شکل آن را رسم کرد و مانند جمع عمل نمود.

مثال: با رسم شکل دایره های توپر و توخالی، حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید. ($\bullet = -1$ و $\bigcirc = +1$)

الف) $+2 + (-6) = -4$ شکل $\bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bullet \bullet$

ب) $-4 - (-7) = -4 + (+7) = +3$ شکل $\bullet \bullet \bullet \bullet \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc$

در گذشته به جای دایره های توپر و توخالی از کلمات دوست و دشمن استفاده می کردند.

حاصل جمع عددهای صحیح از طریق محاسبه

الف) اگر هر دو عدد هم علامت باشند:

۱- هر دو عدد مثبت باشند، حاصل جمع آنها مثل جمع دو عدد طبیعی است.

مثال: حاصل هریک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $+4 + (+6) = 4 + 6 = 10$

ب) $(+9) + 10 = 9 + 10 = 19$

پ) $(+30) + (+47) = 30 + 47 = 77$

ت) $+390 + 1008 = 390 + 1008 = 1398$

۲- هر دو عدد منفی باشند، حاصل جمع آنها مثل قرینه جمع دو عدد طبیعی است.

مثال: حاصل هریک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(-10) + (-20) = -(10+20) = -30$

ب) $-8 + (-31) = -(8+31) = -39$

پ) $(-55) + (-42) = -(55+42) = -97$

ت) $-2500 + (-601) = -(2500+601) = -3101$