

ریاضی دبیرستان

۹

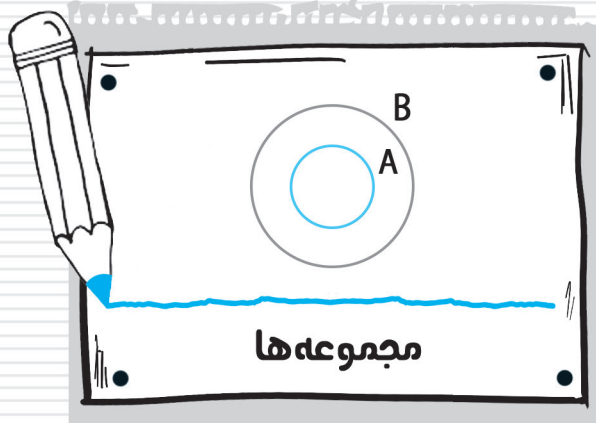
پایه نهم

دوره اول متوسطه

- آموزش ساده و روان
- سؤال‌های امتحانی با پاسخ
- تمرین‌های طبقه‌بندی شده
- کتابی مناسب برای خانه و مدرسه

فهرست مطالب

فصل ۱ – مجموعه‌ها.....	۵
درس اول: معرفی مجموعه.....	۵
درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها.....	۱۰
درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها.....	۱۸
درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال.....	۲۶
فصل ۲ – عددهای حقیقی.....	۳۳
درس اول: عددهای گویا.....	۳۳
درس دوم: عددهای حقیقی.....	۳۹
درس سوم: قدرمطلق و محاسبه تقریبی.....	۵۰
فصل ۳ – استدلال و اثبات در هندسه.....	۵۵
درس اول: استدلال.....	۵۵
درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه.....	۵۸
درس سوم: هم‌نهشتی مثلث‌ها.....	۶۳
درس چهارم: حل مسئله در هندسه.....	۶۶
درس پنجم: شکل‌های متشابه.....	۷۰
فصل ۴ – توان و ریشه.....	۷۵
درس اول: توان صحیح.....	۷۵
درس دوم: نماد علمی.....	۸۳
درس سوم: ریشه‌گیری.....	۸۷
درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال‌ها.....	۹۴
فصل ۵ – عبارتهای جبری.....	۱۰۲
درس اول: عبارتهای جبری و مفهوم اتحاد.....	۱۰۲
درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها.....	۱۱۸
درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها.....	۱۲۶
فصل ۶ – خط و معادله‌های خطی.....	۱۳۷
درس اول: معادله خط.....	۱۳۷
درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ.....	۱۴۶
درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی.....	۱۵۸
فصل ۷ – عبارتهای گویا.....	۱۶۵
درس اول: معرفی و ساده‌کردن عبارتهای گویا.....	۱۶۵
درس دوم: محاسبات عبارتهای گویا.....	۱۷۰
درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها.....	۱۷۷
فصل ۸ – حجم و مساحت.....	۱۸۷
درس اول: حجم و مساحت کره.....	۱۸۷
درس دوم: حجم هرم و مخروط.....	۱۹۳
درس سوم: سطح و حجم.....	۱۹۹



فصل

درس اول: معرفی مجموعه

آموزش

معرفی مجموعه

اسامی دانش آموزان کلاس نهم «ب» به صورت زیر است:

«مریم، سمیه، آمنه، هاجر، سمانه، رابعه، مرضیه، وفا، فاطمه، زهرا، آوا، حدیثه، زینب، هلیا، سیما، یلدا»

مربی پرورشی گروهی را برای اجرای تئاتر مدرسه انتخاب کرد که اسامی آنها عبارت است از: «مریم، سمیه، آمنه، هاجر و سمانه»

اسامی گروه تئاتر را داخل دو آکلاذ قرار می‌دهیم و آن را با حرف T نام‌گذاری می‌کنیم. {سمانه، هاجر، آمنه، سمیه، مریم} = T در این صورت مجموعه گروه تئاتر مدرسه را تشکیل داده‌ایم که گروهی از دانش آموزان مشخص و متمایز (غیر تکراری) هستند.

تعریف: در ریاضی از واژه مجموعه «برای نشان دادن دسته یا گروهی از اشیاء مشخص و متمایز (غیر تکراری) استفاده می‌شود.»

در یک مجموعه عضویت اشیاء باید کاملاً مشخص باشد.

مثال ۱: برای هر یک از عبارت‌های زیر در صورت امکان یک مجموعه تشکیل دهید.

الف) چهار سینمای معروف: نمی‌توان یک مجموعه تشکیل داد، زیرا اعضای مجموعه مشخص نیستند.

ب) اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰: می‌توان یک مجموعه تشکیل داد زیرا اعضای مجموعه مشخص است و عبارت‌اند از: {۲ و ۳ و ۵ و ۷}

پ) حروف سه نقطه الفبای فارسی: می‌توان یک مجموعه تشکیل داد و اعضای آن عبارت‌اند از: {پ، ژ، چ، ث، ش}

ت) سه حرف الفبای انگلیسی: نمی‌توان یک مجموعه تشکیل داد.

ث) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰: می‌توان مجموعه تشکیل داد: {... و ۱۰۰۰۰۳ و ۱۰۰۰۰۲ و ۱۰۰۰۰۱ و ۱۰۰۰۰۰}

مثال ۲: آیا نحوه نوشتن مجموعه $B = \{-۵ و ۱ و ۷ و -۵ و ۳\}$ صحیح است؟ چرا؟

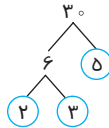
پاسخ: خیر، زیرا اعضای هر مجموعه باید متمایز باشند، در صورتی که -۵ دو بار تکرار شده است. پس به صورت $B = \{-۵ و ۱ و ۳ و ۷\}$ صحیح است.

اعضای یک مجموعه را داخل دو آکلاذ { } قرار می‌دهند.

مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی (A ، B ، C و ...) نام‌گذاری می‌کنند.

اعضای مجموعه را معمولاً با علامت «،» یا «،» یا «و» از یکدیگر جدا می‌کنند.

در نوشتن اعضای یک مجموعه، جابه‌جایی اعضا مهم نیست.



مثال: مجموعه شمارنده‌های اول عدد 30 را بنویسید.

پاسخ: $\{2\}$ و $\{5\}$ یا $\{2\}$ و $\{3\}$ و $\{5\}$ یا $\{2\}$ و $\{3\}$ و $\{5\}$ همه صحیح هستند

عضویت و عدم عضویت

در مثالی که داشتیم به هریک از دانش‌آموزان گروه تتار یک عضو مجموعه T می‌گویند. بنابراین مجموعه T ، 5 عضو دارد. برای آنکه نشان دهیم هاجر عضو مجموعه T است، می‌بایست از نماد « $\in$ هاجر» استفاده کنیم و می‌خوانیم: «هاجر متعلق است به مجموعه T » یا «هاجر عضو مجموعه T است». وفا عضو مجموعه T نیست. این مطلب را به صورت « $\notin T$ وفا» نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم «وفا متعلق به مجموعه T نیست». یا «وفا عضو مجموعه T نیست». بنابراین $\in$ را علامت عضویت و $\notin$ را علامت عدم عضویت می‌گویند.

مثال: الف) مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از 6 را به صورت یک مجموعه نوشته و آن را A بنامید.

پاسخ: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

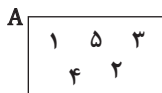
ب) عبارت‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید. (با علامت $\in$ یا $\notin$)

۱) عدد 2 عضو مجموعه A است: $2 \in A$

۲) عدد 6 عضو مجموعه A نیست: $6 \notin A$

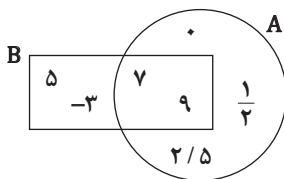
نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون

گاهی اوقات اعضای مجموعه را داخل یک منحنی بسته یا خط شکسته قرار می‌دهند که به این نوع نمایش مجموعه‌ها، نمودار ون می‌گویند.



مثال: باتوجه به مثال بالا مجموعه A را با نمودار ون نشان دهید.

پاسخ:



مثال: باتوجه به نمودار ون اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص نمایید.

پاسخ: $B = \{5, 7, 9, -3\}$ و $A = \{0, 1/2, 2/5, 7, 9\}$

مجموعه تهی

تعریف: مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعه تهی می‌نامند و به صورت $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهند. علامت $\emptyset$ یکی از حروف یونانی است که به آن فی می‌گویند.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از یک را نشان دهید. پاسخ: $\{\}$ یا $\emptyset$

درس اول: معرفی مجموعه

سؤال‌های امتحانی با پاسخ

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «✗» مشخص کنید.

☐ الف، $\{\emptyset\} = \emptyset$

☐ ب) مجموعه $\{0\}$ با مجموعه $\{\}$ برابر است.

☐ پ) عبارت «نویسندگان معروف» یک مجموعه را بیان می‌کند.

☐ ت) مجموعه شمارنده‌های اول عدد یک، یک مجموعه یک عضوی است.

☐ ث) مجموعه «مجدورهای کامل بین 50 و 60 » یک مجموعه تهی را مشخص می‌کند.

☐ ج) مجموعه $\{b, -1, 1/2\}$ با مجموعه $E = \{1/2, 3/6, 1/4, b, -1\}$ برابر است.

☐ چ) واژه مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص و متمایز به کار می‌رود.

۱- هریک از جمله‌های زیر را با يك عدد یا كلمه مناسب کامل کنید.

الف) مجموعه $\{۸ و ۲۳ و ۱\}$ دارای عضو است.

ب) مجموعه $\{۰ و ۱ و ۲ و ۳ و \dots\}$ دارای $B = \{۰\}$ عضو است.

پ) اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه می‌نامیم.

ت) به دلیل تکراری بودن عضو m در مجموعه $\{m و -۱ و ۲ و p و m\}$ ، آن را به صورت می‌نویسیم.

ث) عبارت «اسامی دانش‌آموزان مدرسه شما» یک مجموعه را نشان زیرا عضوهای مجموعه مشخص

۳- برای کدام يك از گزینه‌ها می‌توان يك مجموعه تشکیل داد؟

☐ الف) پنج گل قرمز رنگ ☐ ب) انسان‌های برگزیده ☐ ج) دانش‌آموزان باهوش ☐ د) اسامی روزهای هفته

۴- کدام يك از مجموعه‌های زیر، يك مجموعه تهی نیست؟

☐ الف) اعداد طبیعی بین -۵ و $+۲$ ☐ ب) مضرب‌های اول عدد ۴
☐ ج) اعداد اول بین ۲ و -۲ ☐ د) اعداد طبیعی بین ۱۷ و ۲۵ که مجذور کامل هستند.

۵- مجموعه اعداد صحیح و منفی بزرگتر از -۷ عبارت است از:

☐ الف) $\{۰ و -۱ و -۲ و -۳ و -۴ و -۵ و -۶\}$ ☐ ب) $\{۰ و -۱ و -۲ و -۳ و -۴ و -۵ و -۶ و -۷\}$
☐ ج) $\{۰ و -۱ و -۲ و -۳ و -۴ و -۵ و -۶ و -۷ و -۸ و -۹ و -۱۰ و -۱۱\}$ ☐ د) $\{۰ و -۱ و -۲ و -۳ و -۴ و -۵ و -۶ و -۷ و -۸ و -۹ و -۱۰ و -۱۱ و -۱۲\}$

۶- مجموعه $\{۰ و -۱ و -۲ و -۳\}$ متناظر با کدام عبارت است؟

☐ الف) اعداد صحیح بین صفر و -۳ ☐ ب) قرینه اعداد حسابی کوچکتر از ۴
☐ ج) قرینه اعداد اول کوچکتر از ۴ ☐ د) شمارنده‌های عدد ۶

۷- اگر مجموعه اعداد حسابی کوچکتر از -۱ را G بنامیم، این مجموعه چند عضو دارد؟

۸- مجموعه اعداد صحیح و منفی بزرگتر از -۴ را با اعضا بنویسید. این مجموعه چند عضو دارد؟ بزرگترین عضو این مجموعه را مشخص کنید.

۹- الف) مجموعه S چند عضو دارد؟
ب) جاهای خالی را با علامت مناسب کامل کنید. ($\in$ یا $\notin$)

$S = \{-۱ و ۵ و ۳ و -۴ و \sqrt{\frac{۲۵ \times ۶۴}{۱۰۰}} و \frac{۱۵}{۳}\}$
۱) $-۵ \in S$ ☐ ۲) $۳ \in S$ ☐ ۳) $۱ \in S$ ☐ ۴) $-(-۴) \in S$ ☐ ۵) $۸ - ۹ \in S$ ☐

۱۰- مجموعه حروف كلمه «محمد مهدی» دارای چند عضو است؟

۱۱- از مجموعه‌های مقابل کدام يك باهم مساوی‌اند؟
 $A = \{ \}$ و $B = \{۰\}$ و $C = \emptyset$ و $D = \{\emptyset\}$

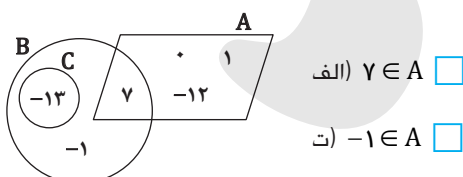
۱۲- بزرگترین و کوچکترین عضو هر مجموعه را مشخص کنید.

$A = \{۰ و \dots و ۶ و ۷ و ۸\}$ $B = \{۰ و \frac{۲}{۹} و \frac{۳}{۸} و ۳ و \frac{۳}{۱} و \dots\}$
 $C = \{-\frac{۱}{۵} و -\frac{۱}{۶} و -\frac{۱}{۷} و \dots و -\frac{۱}{۱۰}\}$ $D = \{\dots و -\frac{۲}{۳} و -\frac{۱}{۳} و ۰ و \frac{۱}{۳} و \frac{۲}{۳} و \dots\}$

۱۳- برای هریک از عبارت‌های زیر در صورت امکان يك مجموعه تشکیل دهید.

الف) اسامی دانش‌آموزان کلاس شما ☐ ب) حروف الفبای فارسی که سه نقطه دارند. ☐ پ) اسامی هفت دختر
ت) سه رنگ زیبا ☐ ث) دو کتاب معروف زبان فارسی ☐ ج) اسامی دریاها و مجاور ایران ☐

۱۴- باتوجه به نمودار و ن، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.



الف) $۷ \in A$ ☐

ب) $-۱۳ \notin B$ ☐

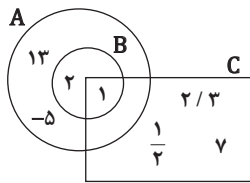
پ) $۷ \notin C$ ☐

ت) $-۱ \in A$ ☐

ث) $۱ \in C$ ☐

ج) $۷ \in B$ ☐

۱۵- اگر $A = \{-3 \text{ و } 1 \text{ و } 3 \text{ و } 6 \text{ و } 14\}$ و $B = \{1 \text{ و } 3 \text{ و } 14\}$ باشند، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان با یک نمودار «ون» نمایش دهید.



$$A = \{ \dots \}$$

$$B = \{ \dots \}$$

$$C = \{ \dots \}$$

۱۶- باتوجه به نمودار ون، هر مجموعه را با عضوهایش مشخص کنید.

۱۷- کدام یک از عبارتهای زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ با نمودار ون نشان دهید.

(پ) جواب معادله $3x - 1 = -5$

(الف) عددهای صحیح منفی بزرگتر از -12 (ب) شمارنده‌های اول عدد 27

(ج) دو شمارنده مرکب عدد 100

(ت) عددهای مثبت کوچکتر از صفر (ث) جواب معادله $12 = 4 - x$

۱۸- هر مجموعه در قسمت A را به مجموعه مناسب آن در قسمت B وصل کنید.

B	A
$\{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9 \text{ و } \dots\}$	مجموعه اعداد فرد اول
$\{3 \text{ و } 5 \text{ و } 7\}$	$\{19\}$
شمارنده‌های عدد 30	$\{0\}$
$\{3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 11 \text{ و } \dots\}$	$\{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 6 \text{ و } 10 \text{ و } 15 \text{ و } 30\}$
اعداد صحیح بین 0 و -1	مجموعه اعداد فرد
مضارب اول عدد 19	$\{ \}$
مجموعه اعداد حسابی کوچکتر از یک	مجموعه سه عدد فرد متوالی با میانگین 5

۱۹- مقدار a را چنان تعیین کنید که مجموعه $F = \{-5 \text{ و } a\}$ دارای یک عضو باشد.

۲۰- آیا مجموعه اعداد اول بین 53 و 59 یک مجموعه تهی است؟ چرا؟

۲۱- الف) یک عبارت بنویسید که نشان دهنده مجموعه تهی باشد.

ب) یک عبارت بنویسید که نشان دهنده مجموعه تک‌عضوی باشد.

۲۲- مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد حسابی کوچکتر از 5

ب) مجموعه شمارنده‌های اول عدد 56

پ) مجموعه اعداد طبیعی زوج کوچکتر از 100

ت) مجموعه چهار عدد اول متوالی با شروع از 13

پاسخ سؤال‌ها

۱- الف) $\emptyset$ مجموعه تهی است ولی $\{\emptyset\}$ دارای یک عضو $\emptyset$ است. ب) $\{0\}$ دارای یک عضو صفر است ولی $\{ \}$ مجموعه تهی است.

پ) زیرا اعضای آن مشخص نیست. ت) عدد یک شمارنده اول ندارد، پس مجموعه شمارنده‌های اول عدد یک، مجموعه تهی است.

ث) $\checkmark$ زیرا بین 50 و 60 هیچ مجذور کاملی قرار ندارد. ج) $\checkmark$ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ پس $E = F = \{-1 \text{ و } b \text{ و } \frac{1}{2}\}$ (ج) $\checkmark$

۲- الف) دو (ب) بی‌شمار (پ) تهی ت) $A = \{-1 \text{ و } 2 \text{ و } p \text{ و } m\}$ (ث) می‌دهد، است.

۳- د عضوهای مجموعه‌های الف، ب و ج مشخص نیستند. ۴- الف $\{+1\} =$ اعداد طبیعی بین -5 و $+2$ ۵- ب ۶- ب

۷- این مجموعه هیچ عضوی ندارد، زیرا: $\{ \dots \text{ و } 2 \text{ و } 1 \text{ و } 0\} =$ مجموعه اعداد حسابی

۸- این مجموعه سه عضو دارد و بزرگ‌ترین عضو آن ۱- است. $\{-1, -2, -3\}$ = اعداد صحیح و منفی بزرگ‌تر از ۴-

۹- الف) مجموعه S، پنج عضو دارد. $S = \{-1, 5, 4, 3, -4\}$ و $\frac{15}{3} = 5$ و $\sqrt{\frac{25 \times 64}{100}} = \frac{\sqrt{25} \times \sqrt{64}}{\sqrt{100}} = \frac{5 \times 8}{10} = \frac{40}{10} = 4$

ب) ۱) $-5 \notin S$ ۲) $3 \in S$ ۳) $1 \notin S$ ۴) $\frac{+4}{-(-4)} \in S$ ۵) $\frac{-1}{1-9} \in S$

۱۰- پنج عضو دارد. $\{ \text{ی و ه و د و ح و م} \}$ = مجموعه حروف کلمه «محمد مهدی» ۱۱- $A = C = \emptyset = \{ \}$ ، C و A

۱۲- A ← بزرگ‌ترین عضو: ۸ و کوچک‌ترین عضو: صفر B ← بزرگ‌ترین عضو: مشخص نیست و کوچک‌ترین عضو: ۲/۸

C ← بزرگ‌ترین عضو: $-\frac{1}{10}$ و کوچک‌ترین عضو: $-\frac{1}{8}$ D ← بزرگ‌ترین عضو: مشخص نیست و کوچک‌ترین عضو: مشخص نیست.

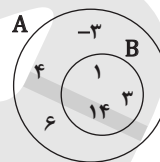
۱۳- الف) می‌توان مجموعه تشکیل داد. ب) $\{ \text{ش و ژ و چ و ث و پ} \}$ = حروف الفبای فارسی که سه نقطه دارند.

پ) نمی‌توان مجموعه تشکیل داد، زیرا اعضای آن مشخص نیست. ت) نمی‌توان مجموعه تشکیل داد، زیرا اعضای آن مشخص نیست.

ث) نمی‌توان مجموعه تشکیل داد. ج) $\{ \text{دریای عمان و خلیج فارس و دریای خزر} \}$ = دریاهای مجاور ایران

۱۴- الف) ✓ ب) ✗ پ) ✓ ت) ✗ ث) ✗ ج) ✓

۱۵- $A = \{-5, 13, 1, 2\}$ $B = \{1, 2\}$ $C = \{1, 2/3, 1/2, 7\}$



۱۷- الف) $\begin{matrix} -1 & -2 & -7 \\ -3 & -8 & -9 \\ -4 & -6 & -11 \\ -5 & -10 & \end{matrix}$ ب) $\begin{matrix} 3 \\ \end{matrix}$ پ) $\begin{matrix} -4 \\ -3 \end{matrix}$ ت) $\begin{matrix} \square \\ \end{matrix}$ ث) $\begin{matrix} -8 \\ \end{matrix}$

ج) نمی‌توان مجموعه مشخص کرد.

۱۸-

B	A
$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$	مجموعه اعداد فرد اول
$\{3, 5, 7\}$	$\{19\}$
شمارنده‌های عدد ۳۰	$\{0\}$
$\{3, 5, 7, 11, \dots\}$	$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
اعداد صحیح بین ۰ و ۱-	مجموعه اعداد فرد
مضارب اول عدد ۱۹	$\{ \}$
مجموعه اعداد حسابی کوچک‌تر از یک	مجموعه سه عدد فرد متوالی با میانگین ۵

۱۹- برای اینکه مجموعه دارای یک عضو باشد، باید $a = -5$ شود. ۲۰- بله، زیرا بین ۵۳ و ۵۹ همه اعداد مرکب هستند و هیچ عدد اولی وجود ندارد.

۲۱- الف) مجموعه اعداد اول کوچک‌تر از یک ب) مجموعه اعداد بین ۲۰ تا ۳۰ که جذر کامل دارند. $\{25\}$

۲۲- الف) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ب) $\{2, 7\}$ پ) $\{98, 96, \dots, 8, 6, 4, 2\}$ ت) $\{13, 17, 19, 23\}$

آموزش

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعه برابر

تعریف: اگر تعداد اعضای دو مجموعه A و B یکسان باشند و هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد، در این صورت دو مجموعه A و B برابر هستند و می‌نویسیم: $A = B$

مثال ۱: اگر سه عدد فرد متوالی که میانگین آنها برابر با ۵ باشد $C = \{ \}$ و $D = \{ \}$ (اعداد اول بین ۲ و ۸) باشند، آیا مجموعه C و D باهم مساوی هستند؟
پاسخ: $C = \{ ۳ و ۵ و ۷ \}$ و $D = \{ ۳ و ۵ و ۷ \}$
مجموعه‌های C و D شامل ۳ عضو هستند و هر عضو C عضوی از D و هر عضو D ، عضوی از C است. پس $C = D$ است.

مثال ۲: اگر مجموعه A شامل شمارنده‌های طبیعی عدد ۶ و مجموعه B شامل اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷ باشند، آیا $A = B$ است؟ چرا؟
پاسخ: خیر، زیرا $A = \{ ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ \}$ و $B = \{ ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ \}$ است. عددهای ۴ و ۵ عضو B هستند، ولی در A نیستند.

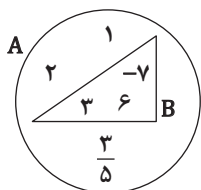
اگر عضوی در A باشد که در B نباشد، یا عضوی در B باشد که در A نباشد، در این صورت مجموعه‌های A و B باهم برابر نیستند و می‌نویسیم: $A \neq B$

زیر مجموعه

تعریف: اگر A و B دو مجموعه باشند و همه اعضای مجموعه A عضو مجموعه B باشند، در این صورت A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$

مثال ۱: ($\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی است) $\{ \text{اعداد اول} \} \subseteq \mathbb{N}$ (ب) $\{ \text{دانش آموزان مدرسه شما} \} \subseteq \{ \text{دانش آموزان کلاس شما} \}$ (الف)

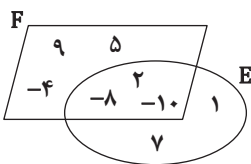
مثال ۲: باتوجه به نمودار زیر مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص کنید و تحقیق کنید که آیا $B \subseteq A$ برقرار است یا خیر؟



پاسخ: $B = \{ -۷ و ۶ و ۳ \}$ و $A = \{ \frac{۳}{۵} و -۷ و ۶ و ۳ و ۲ و ۱ \}$

می‌توان مشاهده کرد که تمام عضوهای مجموعه B در مجموعه A است. پس خواهیم داشت: $B \subseteq A$

مثال ۳: باتوجه به نمودار زیر مجموعه‌های F و E را با اعضا مشخص کنید و تحقیق کنید که آیا $E \subseteq F$ برقرار است یا خیر؟



پاسخ: $F = \{ -۱۰ و -۸ و -۴ و ۱ و ۲ و ۵ و ۹ \}$ و $E = \{ -۱۰ و -۸ و -۴ و ۱ و ۲ و ۵ و ۹ \}$

می‌توان مشاهده کرد که اعداد ۱ و ۲ عضو E هستند ولی عضو F نیستند. یعنی مجموعه E زیرمجموعه F نیست.

در این صورت می‌نویسیم: $E \not\subseteq F$

اگر A و B دو مجموعه باشند و عضوی در مجموعه A باشد که در مجموعه B نباشد، پس مجموعه A زیرمجموعه مجموعه B نیست و می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$

هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است: $A \subseteq A$

مثال ۱: اگر $A = \{ -۱ و ۳ و \frac{۴}{۵} \}$ باشد، تحقیق کنید آیا $A \subseteq A$ است؟

پاسخ: بله، زیرا هر عضو A در خود مجموعه A قرار دارد.

مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه دلخواهی است: $\emptyset \subseteq A$

مثال ۱: باتوجه به مجموعه‌های A ، B و C درستی یا نادرستی عبارت‌ها را مشخص کنید.

$$A = \{-4 \text{ و } -3 \text{ و } -2 \text{ و } \dots \text{ و } 3 \text{ و } 4\} \text{ و } B = \{2 \text{ و } 3 \text{ و } 4\} \text{ و } C = \{0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5\}$$

درست $B \subseteq B$ (ث) درست $\emptyset \subseteq C$ (ت) نادرست $B \not\subseteq C$ (پ) نادرست $C \subseteq A$ (ب) درست $B \subseteq A$ (الف)

مثال ۲: همهٔ زیرمجموعه‌های $B = \{10 \text{ و } 11 \text{ و } 12\}$ را بنویسید.

پاسخ: برای نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه ابتدا زیرمجموعه‌های تک عضوی، سپس دو عضوی و ... را می‌نویسیم. سپس باتوجه به نکته‌های قبل $\emptyset$ و خود مجموعه را نیز به عنوان زیرمجموعه می‌نویسیم.

بنابراین زیرمجموعه‌های B عبارت‌اند از: $\{10 \text{ و } 11 \text{ و } 12\}$ ، $\{10 \text{ و } 12\}$ ، $\{11 \text{ و } 12\}$ ، $\{10 \text{ و } 11\}$ ، $\{10\}$ ، $\{11\}$ ، $\{12\}$ ، $\emptyset$ ، مجموعه B ، A زیرمجموعه دارد.

✎ اگر A ، B و C سه مجموعه باشند و داشته باشیم $\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{cases}$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq C$ است.

تعداد زیرمجموعه‌ها

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه از رابطه 2^n به دست می‌آید که n تعداد اعضای مجموعه است.

$$n = 4 \Rightarrow 2^4 = 16$$

مثال ۱: مجموعه $A = \{e \text{ و } f \text{ و } c \text{ و } d\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخ: مجموعه A ، ۱۶ زیرمجموعه دارد که عبارت‌اند از: $\emptyset$ ، $\{e\}$ ، $\{f\}$ ، $\{c\}$ ، $\{d\}$ ، $\{e \text{ و } f\}$ ، $\{e \text{ و } c\}$ ، $\{e \text{ و } d\}$ ، $\{f \text{ و } c\}$ ، $\{f \text{ و } d\}$ ، $\{c \text{ و } d\}$ ، $\{e \text{ و } f \text{ و } c\}$ ، $\{e \text{ و } f \text{ و } d\}$ ، $\{f \text{ و } c \text{ و } d\}$ ، $\{e \text{ و } c \text{ و } d\}$ ، $\{e \text{ و } f \text{ و } c \text{ و } d\}$

مثال ۲: مجموعه G دارای ۳۲ زیرمجموعه است. این مجموعه چند عضو دارد؟

$$2^n = 32 = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

پاسخ: مجموعه G دارای ۵ عضو است.

نمایش مجموعه

هر مجموعه را می‌توان به چهار شیوه نوشت:

۱- به زبان فارسی ۲- با اعضا ۳- با نمودار ون ۴- به زبان ریاضی (با نمادهای ریاضی)

۱- به زبان فارسی: ویژگی مشترک اعضای یک مجموعه با عبارت‌های فارسی بیان می‌شود.

مثال: مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷

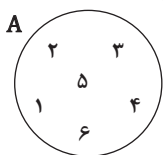
۲- با اعضا: نمایش تک تک اعضا که بین دو آکولاد قرار گرفته‌اند.

$$A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 6\}$$

مثال:

۳- با نمودار ون: اعضای یک مجموعه در داخل یک خط بسته قرار می‌گیرد.

مثال:



۴- به زبان ریاضی (با نمادهای ریاضی): برای نشان دادن یک مجموعه با نمادهای ریاضی باید یک متغیر را به عنوان نمایندهٔ اعضای مجموعه

مشخص کنیم و ویژگی مشترکی که بین همهٔ اعضای مجموعه قرار دارد را به زبان ریاضی به آن متغیر نسبت دهیم.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷ را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) ابتدا یک حرف کوچک انگلیسی مانند x یا هر حرف کوچک دیگر را به عنوان نماینده تمام اعضا در داخل مجموعه می‌نویسیم: $\{x$

ب) مجموعه بزرگی که اعضای موردنظر زیرمجموعه‌ای از آن می‌باشد را معرفی می‌کنیم: $\{x \in \mathbb{N}$

پ) علامت « $|$ » را قرار می‌دهیم: $\{x \in \mathbb{N} |$

ت) با استفاده از علامت‌های $(<)$ یا $(\geq)$ یا نمادهای دیگر ریاضی محدوده اعداد موردنظر در آن مجموعه بزرگ را مشخص می‌نماییم.

$\{x \in \mathbb{N} | x < 7\}$ یا $\{x \in \mathbb{N} | x \leq 6\}$

نوشتن مجموعه به زبان ریاضی برای مجموعه‌هایی که تعداد اعضای مجموعه زیاد باشد، مفید است.

مثال: برای نوشتن مجموعه ضرب‌های طبیعی عدد ۵ با نمادهای ریاضی، $5k$ را به عنوان نماینده اعضا در نظر می‌گیریم که در آن $k \in \mathbb{N}$ است و می‌نویسیم $\{5k | k \in \mathbb{N}\}$ که خوانده می‌شود مجموعه اعدادی که به شکل $5k$ هستند، به طوری که k متعلق به مجموعه اعداد طبیعی است.

در نوشتن یک مجموعه به زبان ریاضی علامت « $|$ » خوانده می‌شود «به طوری که» یا «به شرطی که» یا «به قسمی که».

در زیر چند مجموعه را به زبان فارسی یا با نوشتن اعضا و یا به زبان ریاضی نشان می‌دهیم.

الف) مجموعه اعداد طبیعی زوج $\rightarrow \{2k | k \in \mathbb{N}\} = \{2 \text{ و } 4 \text{ و } 6 \text{ و } 8 \text{ و } \dots\}$

ب) مجموعه اعداد طبیعی فرد $\rightarrow \{2k-1 | k \in \mathbb{N}\} = \{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9 \text{ و } \dots\}$

پ) مجموعه اعداد صحیح یک‌رقمی $\rightarrow \{x \in \mathbb{Z} | -9 \leq x \leq 9\} = \{-9 \text{ و } -8 \text{ و } -7 \text{ و } \dots \text{ و } 8 \text{ و } 9\}$

ت) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰ $\rightarrow \{x \in \mathbb{N} | \frac{20}{x} \in \mathbb{N}\} = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 10 \text{ و } 20\}$

ث) مجموعه اعداد طبیعی بین ۱۱ و ۱۷ $\rightarrow \{x \in \mathbb{N} | 11 < x < 17\} = \{12 \text{ و } 13 \text{ و } 14 \text{ و } 15 \text{ و } 16\}$ یا $\{x \in \mathbb{N} | 12 \leq x \leq 16\}$

مثال: مجموعه $A = \{2k-3 | k \in \mathbb{N}\}$ را با اعضا مشخص کنید. برای نوشتن اعضای مجموعه A از جدول زیر استفاده می‌کنیم.

k	۱	۲	۳	۴	۵	...
$2k-3$	$(2 \times 1) - 3 = -1$	$(2 \times 2) - 3 = 1$	$(2 \times 3) - 3 = 3$	$(2 \times 4) - 3 = 5$	$(2 \times 5) - 3 = 7$	...

پس می‌نویسیم: $A = \{-1 \text{ و } 1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } \dots\}$

مجموعه‌های بزرگ اعداد را می‌توان به صورت زیر به زبان فارسی یا با نوشتن اعضا و یا به زبان ریاضی نوشت.

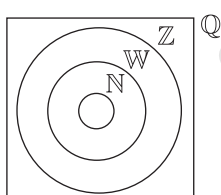
$\mathbb{N} = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{W} = \{0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots\} = \{k-1 | k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots \text{ و } -3 \text{ و } -2 \text{ و } -1 \text{ و } 0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots\}$: مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \text{ و } b \in \mathbb{Z} \text{ و } b \neq 0\}$: مجموعه اعداد گویا

مجموعه اعداد گویا را نمی‌توان با اعضا نشان داد، زیرا اولین عدد بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست.

مجموعه اعداد طبیعی زوج را با E و مجموعه اعداد طبیعی فرد را با O نشان می‌دهیم.

وضعیت مجموعه‌های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ را نسبت به هم می‌توان به کمک نمودار ون طبق شکل زیر نشان داد.



مطابق نمودار مقابل: هر عضو مجموعه اعداد طبیعی عضوی از مجموعه‌های $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ ، هر عضو مجموعه اعداد حسابی عضوی از مجموعه‌های $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و هر عضو مجموعه اعداد صحیح عضوی از مجموعه $\mathbb{Q}$ است، زیرا

هر عدد صحیح a را می‌توان به صورت $\frac{a}{1}$ نوشت. به زبان ریاضی می‌توان نوشت: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

سؤال‌های امتحانی با پاسخ

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

۱- جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «✗» مشخص کنید.

☐ الف، مجموعه‌ای که عضو ندارد، زیرمجموعه نیز ندارد.

☐ ب، فقط مجموعه تهی است که یک زیرمجموعه دارد.

☐ پ، مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 1\}$ هیچ عضوی ندارد.

☐ ت، هر مجموعه دلخواه حداقل دو زیرمجموعه دارد.

☐ ث، کوچک‌ترین عضو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -1\}$ عدد -1 می‌باشد.

☐ ج، مجموعه $A = \{a \text{ و } b\}$ با مجموعه $B = \{b \text{ و } a\}$ برابر است.

۲- هریک از جمله‌های زیر را با عدد، کلمه یا عبارت مناسب کامل کنید.

الف، هر مجموعه زیرمجموعه است.

ب، مجموعه تهی همه مجموعه‌ها است.

پ، در مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -4\}$ بزرگ‌ترین عضو، عدد می‌باشد.

ت، مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\}$ دارای عضو می‌باشد.

ث، عبارت «مجموعه A زیرمجموعه B می‌باشد» را با نماد ریاضی به صورت نمایش می‌دهیم.

ج، در مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < \square\}$ اگر به جای $\square$ عدد قرار دهیم، مجموعه دارای ۳ عضو می‌شود.

۳- يك مجموعه شش عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

☐ د) ۱۲

☐ ج) ۶۴

☐ ب) ۶۳

☐ الف) ۳۱

۴- مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 1\}$ با کدام گزینه برابر است؟

☐ د) $\{1 \text{ و } -2\}$

☐ ج) $\{0 \text{ و } -1\}$

☐ ب) $\{0 \text{ و } -1 \text{ و } -2\}$

☐ الف) $\{1 \text{ و } 0 \text{ و } -1\}$

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

۵- نمایش اعضای مجموعه مقابل کدام است؟

☐ د) $\{\}$

☐ ج) $\{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3\}$

☐ ب) $\{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4\}$

☐ الف) $\{4 \text{ و } 5\}$

۶- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری کامل کنید که مجموعه‌ها برابر باشند.

الف) $\left\{\frac{3}{63} \text{ و } \dots \text{ و } \frac{-1}{4} \text{ و } \sqrt{\frac{9}{25}}\right\} = \left\{\frac{3}{8} \text{ و } -4 \text{ و } \dots \text{ و } -\frac{25}{9}\right\}$

ب) $\left\{\frac{144}{4} \text{ و } -\frac{4}{9} \text{ و } \dots \text{ و } \frac{121}{22}\right\} = \left\{\frac{72}{9} \text{ و } (6 \text{ و } 36) \text{ و } \dots \text{ و } \frac{9}{9}\right\}$

۷- الف) برای مجموعه $F = \{2 \text{ و } 1 \text{ و } 0 \text{ و } -1 \text{ و } -2\}$ نمودار ون را رسم کنید.

ب) در نمودار بالا عضوهایی که مضرب صحیح ۲ هستند را با يك خط بسته مشخص کنید و آن را E بنامید.

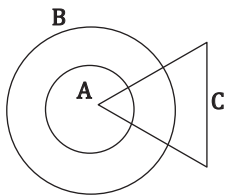
پ) مجموعه E را بنویسید. آیا هر عضو E، عضوی از F است؟

ت) چه رابطه‌ای بین مجموعه F و E وجود دارد؟ (به زبان ریاضی بنویسید)

۸- دلیل درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\left\{\frac{3}{8} \text{ و } 0 \text{ و } -7\right\} \subseteq \left\{-\frac{28}{4} \text{ و } 0 \text{ و } -1\right\}$

ب) $\{a \text{ و } b \text{ و } d \text{ و } e\} \not\subseteq \{a \text{ و } 0 \text{ و } e \text{ و } i\}$



الف) $A \subseteq B$

ت) $C \subseteq B$

ب) $A \not\subseteq C$

ث) $B \not\subseteq B$

پ) $\emptyset \subseteq A$

ج) $B \not\subseteq C$

۹- باتوجه به نمودار، دلیل درستی یا نادرستی عبارتها را مشخص کنید.

۱۰- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{-19, -18, -17\}$ را بنویسید.

۱۱- الف) اگر $M = \{10, 11, 12, 13\}$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های M چقدر است؟

ب) تمام زیرمجموعه‌های یک‌عضوی مجموعه M را بنویسید.

پ) تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه M را بنویسید.

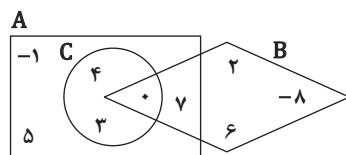
ت) تمام زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه M را بنویسید.

ث) زیرمجموعه چهارعضوی مجموعه M را بنویسید.

۱۲- مجموعه‌ای ۵ عضو دارد. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

۱۳- یک مجموعه ۱۲۸ زیرمجموعه دارد. تعداد عضوهای این مجموعه را به دست آورید.

۱۴- باتوجه به نمودار روبه‌رو:



الف) هریک از مجموعه‌ها را با اعضایش مشخص کنید.

ب) در داخل مربع نماد مناسب ($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\not\subseteq$) قرار دهید.

۱) $-8 \in A$

۲) $A \subseteq B$

۳) $\{2, 6\} \subseteq B$

۴) $\emptyset \subseteq A$

۵) $0 \in C$

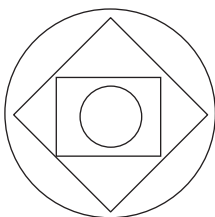
۶) $7 \in A$

۷) $-1 \in C$

۸) $C \subseteq A$

۱۵- هر سه مجموعه $\{0, 5, \frac{3}{7}\}$ و $A = \{-1, 4\}$ و $B = \{-1, 2\}$ و $C = \{2, 9, 0\}$ را روی یک نمودار ون نشان دهید.

۱۶- در نمودار ون مقابل، مجموعه‌های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ را باتوجه به وضعیت آنها نسبت به هم مشخص کنید.



۱۷- هر کدام از عبارتهای زیر را به زبان ریاضی بنویسید و با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی آن را مشخص کنید.

- | | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| الف) هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است. | ب) هر عدد طبیعی یک عدد صحیح است. | پ) هر عدد طبیعی یک عدد گویا است. |
| ت) هر عدد گویا یک عدد صحیح است. | ث) هر عدد گویا یک عدد حسابی است. | ج) هر عدد صحیح یک عدد گویا است. |
| چ) هر عدد صحیح یک عدد حسابی است. | خ) هر عدد حسابی یک عدد صحیح است. | ح) هر عدد حسابی یک عدد گویا است. |
| د) هر عدد گویا یک عدد طبیعی است. | ز) هر عدد صحیح یک عدد طبیعی است. | ر) هر عدد حسابی یک عدد طبیعی است. |

۱۸- مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -3\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid -1 < x < 3\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 < x < +4\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 2\}$$

۱۹- صورت دیگر هریک از مجموعه‌های زیر را با علائم و نماد ریاضی بنویسید. (راهنمایی: هرکدام از مجموعه‌ها را به چندین حالت می‌توان نوشت)

$$\begin{aligned} A &= \{ \dots, 6, 5, 4, \dots \} & B &= \{ 1, 2, 3, 4 \} & C &= \{ -7, -8, -9, \dots \} \\ D &= \{ 6, 7, 8, \dots, 53 \} & E &= \{ -4, -3, -2, \dots, +2 \} & F &= \{ -5, -4, -3, \dots, 0 \} \end{aligned}$$

۲۰- صورت دیگر هریک از مجموعه‌های زیر را با علائم و نماد ریاضی بنویسید.

$$\begin{aligned} A &= \{ -1, 0, 1, 2, 3 \} & B &= \{ 10, 11, 12, 13 \} & C &= \{ 2, 3, 4, 5 \} \\ D &= \{ \dots, 6, 7, 8 \} & E &= \{ -9, -8, -7, -6 \} & F &= \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \} \end{aligned}$$

۲۱- هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

(الف) مجموعه اعداد طبیعی بزرگتر از ۴
(ب) مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از ۴ و بزرگتر از -۴
(پ) مجموعه اعداد صحیح بین ۳+ و ۲-
(ت) مجموعه اعداد حسابی کوچکتر از ۷

۲۲- هریک از مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.

(الف) مجموعه اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۸
(ب) مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۸
(پ) مجموعه اعداد صحیح بزرگتر از ۳-
(ت) مجموعه اعداد طبیعی بزرگتر از ۱۰

۲۳- x را چنان تعیین کنید که دو مجموعه $A = \{ x-5, -11, 0 \}$ و $B = \{ 0, -11, -2x+7 \}$ با یکدیگر برابر باشند.

۲۴- مقدار a را چنان تعیین کنید که دو مجموعه $F = \{ -x+1, x-3 \}$ و $E = \{ a \}$ با یکدیگر برابر باشند.

۲۵- اگر $\{ 7 \} = \{ -2a+b, -1-4a \}$ باشد، مقدارهای a و b چقدر است؟

۲۶- مجموعه‌های زیر را به زبان فارسی بیان کنید. (راهنمایی: هرکدام را به حالت‌های دیگری نیز می‌توان نوشت)

$$\begin{aligned} A &= \{ 2, 3, 4 \} & B &= \{ -4, -3, -2, \dots \} & C &= \{ \dots, 6, 7, 8 \} \\ D &= \{ x \in \mathbb{N} \mid 2x+1=5 \} \end{aligned}$$

۲۷- مجموعه روبه‌رو را با نوشتن اعضا و به زبان فارسی بنویسید.

۲۸- کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو هریک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} A &= \{ -6, -5, -4, -3, -2 \} & B &= \{ \dots, -3, -2, -1 \} & C &= \{ +5, +6, +7, +8, \dots \} \end{aligned}$$

۲۹- مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

$$\begin{aligned} A &= \{ x \in \mathbb{Z} \mid x < 3 \} & B &= \{ x \in \mathbb{W} \mid -2 \leq x < 5 \} & C &= \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < 5 \} \\ D &= \{ x \in \mathbb{W} \mid x \leq -2 \} & E &= \{ x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \} & F &= \{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{4} < x < \sqrt{9} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \{ 4x+1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } x < 3 \} & H &= \{ x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -2 \leq x \leq 2 \} \end{aligned}$$

۳۰- مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

$$\begin{aligned} A &= \{ x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 6 \} & B &= \{ 4x-1 \mid x=3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 6 \} & C &= \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10 \} \\ D &= \{ x \in \mathbb{Z} \mid 6x+2=-10 \} & E &= \{ x \in \mathbb{Z} \mid -7 < x \leq 2 \} & F &= \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2 \} \end{aligned}$$

پاسخ سؤال‌ها

۱- الف) ✗ مجموعه‌ای که عضو ندارد، مجموعه تهی است و مجموعه تهی زیرمجموعه خودش است.

ب) ✓ هر مجموعه غیر از مجموعه تهی حداقل دو زیرمجموعه دارد: مجموعه تهی و خود مجموعه

ت) ✗ زیرا مجموعه تهی فقط یک زیرمجموعه دارد.

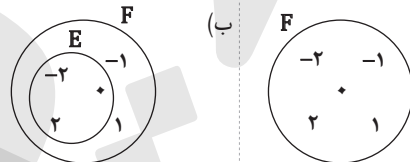
۲- الف) خودش ب) زیرمجموعه پ) -E

۳- ج $2^6 = 64 \Rightarrow (n \text{ تعداد اعضاها})$ و $2^n = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$ ۴- ج ۵- ج

۶- $\left\{ \frac{3}{63}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{25} \right\}$ (الف)

$\left\{ \frac{121}{22}, \frac{6}{36}, -\frac{4}{9}, \frac{121}{22}, \frac{6}{36}, -\frac{4}{9} \right\}$ (ب)

۷- الف) (ب) $E = \{0, 2, -2\}$ ، بلکه هر عضو E، عضوی از F است.



ت) $E \subseteq F$ مجموعه E زیرمجموعه مجموعه F است.

۸- الف) ✓ زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ عضوی از مجموعه سمت راست است. $\left(-\frac{28}{4} = -7\right)$

ب) ✓ زیرا عضو 0 در مجموعه سمت چپ، عضو مجموعه سمت راست نیست.

۹- الف) ✓ زیرا تمام مجموعه A درون مجموعه B قرار دارد.

پ) ✓ مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

ث) ✗ زیرا هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.

۱۰- $\emptyset, \{-17\}, \{-18\}, \{-19\}, \{-17 \text{ و } -18\}, \{-17 \text{ و } -19\}, \{-18 \text{ و } -19\}, \{-17 \text{ و } -18 \text{ و } -19\}$

۱۱- الف) تعداد زیرمجموعه‌های M، ۱۶ تا است. $2^4 = 16 \Rightarrow 2^n = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$ (ب) $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$

پ) $\{10 \text{ و } 11\}, \{10 \text{ و } 12\}, \{10 \text{ و } 13\}, \{11 \text{ و } 12\}, \{11 \text{ و } 13\}, \{12 \text{ و } 13\}$

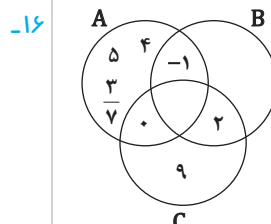
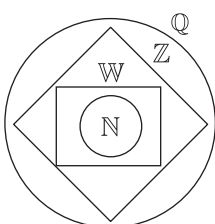
ت) $\{10 \text{ و } 11 \text{ و } 12\}, \{10 \text{ و } 11 \text{ و } 13\}, \{10 \text{ و } 12 \text{ و } 13\}, \{11 \text{ و } 12 \text{ و } 13\}$

ث) $\{10 \text{ و } 11 \text{ و } 12 \text{ و } 13\}$ (مجموعه تهی هم زیرمجموعه M است که هیچ عضوی ندارد)

۱۲- ۳۲ زیرمجموعه دارد. $2^5 = 32 \Rightarrow n = 5$ ۱۳- این مجموعه ۷ عضو دارد. $2^n = 128 \Rightarrow n = 7$

۱۴- الف) $C = \{0, 3, 4\}$ و $B = \{0, 7, 6, -8, 2\}$ و $A = \{0, 7, 3, 4, 5, -1\}$

ب) ۱) $-8 \notin A$ ۲) $A \not\subseteq B$ ۳) $\{2, 6\} \subseteq B$ ۴) $\emptyset \subseteq A$ ۵) $0 \in C$ ۶) $7 \in A$ ۷) $-1 \notin C$ ۸) $C \subseteq A$



۱۷- الف) $N \subseteq W$ صحیح است. زیرا $\{... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰\} \subseteq \{... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰\}$

ب) $N \subseteq Z$ صحیح است. زیرا $\{... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و -۱ و -۲ و ...\} \subseteq \{... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰\}$

پ) $N \subseteq Q$ صحیح است. زیرا اگر به هر عدد طبیعی، مخرج یک بدهیم، یک عدد گویا می‌شود.

$$-\frac{2}{3} \in Q \quad \text{و} \quad -\frac{2}{3} \notin Z$$

ت) $Q \subseteq Z$ نادرست است. زیرا کسرهایی که ساده نشدنی هستند در مجموعه Z قرار ندارند. مثال:

$$-\frac{2}{3} \in Q \quad \text{ولی} \quad -\frac{2}{3} \notin Z$$

ث) $Q \subseteq W$ نادرست است. زیرا اعداد منفی کسری در Q هستند ولی در W نیستند. مثال:

ج) $Z \subseteq Q$ صحیح است. زیرا اگر به هر عدد صحیح، مخرج یک بدهیم، یک عدد گویا می‌شود.

$$-3 \in Z \quad \text{ولی} \quad -3 \notin W$$

چ) $Z \subseteq W$ نادرست است. زیرا اعداد منفی در Z هستند ولی در W نیستند. مثال:

ح) $W \subseteq Z$ صحیح است. زیرا $\{... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و -۱ و -۲ و ...\} \subseteq \{... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰\}$

خ) $W \subseteq Q$ صحیح است. زیرا اگر به هر عدد حسابی، مخرج یک بدهیم، یک عدد گویا می‌شود.

$$\frac{2}{3} \in Q \quad \text{ولی} \quad \frac{2}{3} \notin N$$

د) $Q \subseteq N$ نادرست است. زیرا کسرهایی ساده نشدنی در مجموعه N قرار ندارند. مثال:

ذ) $Z \subseteq N$ نادرست است. زیرا اعداد منفی و صفر در Z هستند ولی در N نیستند. (ر) $W \subseteq N$ نادرست است. زیرا $0 \notin N$ ولی $0 \in W$

$$A = \{0 و ۱ و ۲ و ۳ و ۴\} \quad B = \{-۴ و -۵ و -۶ و ...\} \quad C = \{۱ و ۲\} \quad D = \{۱ و ۲\} \quad E = \{۱ و ۲ و ۳\} \quad F = \{-۱ و ۰ و ۱\} \quad \text{۱۸-}$$

$$A = \{x \in Z \mid x \leq ۶\} \quad \text{یا} \quad \{x \in Z \mid x < ۷\} \quad B = \{x \in N \mid x < ۵\} \quad \text{یا} \quad B = \{x \in N \mid x \leq ۴\} \quad \text{۱۹-}$$

$$C = \{x \in Z \mid x < -۶\} \quad \text{یا} \quad \{x \in Z \mid x \leq -۷\} \quad D = \{x \in N \mid ۵ < x < ۵۴\} \quad \text{یا} \quad D = \{x \in N \mid ۶ \leq x \leq ۵۳\}$$

$$E = \{x \in Z \mid -۴ \leq x \leq ۲\} \quad \text{یا} \quad E = \{x \in Z \mid -۵ < x < ۳\} \quad F = \{x \in Z \mid -۵ \leq x \leq ۰\} \quad \text{یا} \quad F = \{x \in Z \mid -۶ < x < ۱\}$$

$$A = \{x \in Z \mid -۲ < x < ۴\} \quad B = \{x \in N \mid ۱۰ \leq x \leq ۱۳\} \quad C = \{x \in N \mid ۱ < x < ۶\} \quad \text{۲۰-}$$

$$D = \{x \in Z \mid x < ۹\} \quad E = \{x \in Z \mid -۱۰ < x \leq -۶\} \quad F = \{x \in Z \mid -۴ < x < ۵\}$$

$$\{... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰\} \quad \text{الف)} \quad \{-۳ و -۲ و -۱ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳\} \quad \text{ب)} \quad \{-۱ و ۰ و ۱ و ۲\} \quad \text{پ)} \quad \{۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶\} \quad \text{ت)} \quad \text{۲۱-}$$

$$\{x \in Z \mid ۰ < x < ۸\} \quad \text{الف)} \quad \{x \in N \mid x < ۸\} \quad \text{ب)} \quad \{x \in Z \mid x > -۳\} \quad \text{پ)} \quad \{x \in N \mid x > ۱۰\} \quad \text{ت)} \quad \text{۲۲-}$$

$$A = B \Rightarrow \{x - ۵ و -۱۱ و ۰\} = \{۰ و -۱۱ و -۲x + ۷\} \Rightarrow x - ۵ = -۲x + ۷ \Rightarrow x + ۲x = ۷ + ۵ \Rightarrow ۳x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۳} = ۴ \quad \text{۲۳-}$$

اگر $x = ۴$ باشد، $A = B$ می‌شود.

$$E = F \Rightarrow \{a\} = \{-x + ۱ و x - ۳\} \Rightarrow -x + ۱ = a \quad \text{و} \quad x - ۳ = a \quad \text{۲۴-}$$

$$-x + ۱ = x - ۳ \Rightarrow -x - x = -۳ - ۱ \Rightarrow -۲x = -۴ \Rightarrow x = \frac{-۴}{-۲} = ۲ \rightarrow x - ۳ = a \quad \text{و} \quad x = ۲ \Rightarrow ۲ - ۳ = a \Rightarrow a = -۱$$

$$\{x a - ۱ و -۲a + b\} = \{۷\} \Rightarrow x a - ۱ = ۷ \quad \text{و} \quad -۲a + b = ۷ \quad \text{و} \quad x a - ۱ = ۷ \Rightarrow x a = ۱ + ۷ = ۸ \Rightarrow a = \frac{۸}{x} = ۲ \Rightarrow a = ۲ \quad \text{۲۵-}$$

$$-۲a + b = ۷ \quad \text{و} \quad a = ۲ \Rightarrow -۲ \times ۲ + b = ۷ \Rightarrow -۴ + b = ۷ \Rightarrow b = ۷ + ۴ = ۱۱ \quad \text{پس: } a = ۲ \quad \text{و} \quad b = ۱۱$$

$$A: \text{مجموعه اعداد طبیعی بین ۱ و ۵} \quad B: \text{مجموعه اعداد صحیح بزرگتر از -۵} \quad C: \text{مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از ۹} \quad \text{۲۶-}$$

$$\{x \in N \mid ۲x + ۱ = ۵\} = \{۲\} \rightarrow \text{مجموعه اعداد طبیعی که جواب معادله } ۲x + ۱ = ۵ \text{ است.} \quad \text{۲۷-}$$

$$A: \text{کوچکترین عضو} \leftarrow -۶ \quad \text{و} \quad \text{بزرگترین عضو} \leftarrow -۲ \quad B: \text{کوچکترین عضو} \leftarrow \text{مشخص نیست و بزرگترین عضو} \leftarrow -۱$$

$$C: \text{کوچکترین عضو} \leftarrow +۵ \quad \text{و} \quad \text{بزرگترین عضو} \leftarrow \text{مشخص نیست.}$$

۲۹-

$A = \{2, 1, 0, -1, \dots\}$ و $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و $C = \{1, 2, 3, 4\}$ و $D = \{\} = \emptyset$ و $E = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$

$F = \{\} = \emptyset$ و $(x \in \mathbb{N} \text{ و } x < 3 \Rightarrow x = 1 \text{ و } 2) \Rightarrow G = \{x \times 1 + 1, x \times 2 + 1\} = \{5 \text{ و } 9\}$

$H = \{(-2)^2, (-1)^2, (0)^2, (1)^2, (2)^2\} = \{4 \text{ و } 1 \text{ و } 0 \text{ و } 1 \text{ و } 4\} \Rightarrow H = \{0 \text{ و } 1 \text{ و } 4\}$

۳۰-

$A = \{3 \text{ و } 4 \text{ و } 5\}$ و $B = \{x \times 3 - 1, x \times 4 - 1, x \times 5 - 1, x \times 6 - 1\} = \{11 \text{ و } 15 \text{ و } 19 \text{ و } 23\}$

$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ و $x = -3 \Rightarrow (-3)^2 = 9 < 10$ و $x = -2 \Rightarrow (-2)^2 = 4 < 10$

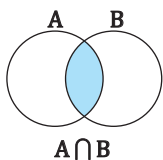
$D = \{-2\} \Rightarrow 6x + 2 = -10 \Rightarrow 6x = -10 - 2 = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{6} = -2$

$E = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ و $F = \{-2, -3, -4, \dots\}$

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

آموزش

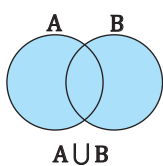
اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها



تعریف: اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای که اعضای آن هم عضو A و هم عضو B باشند را اشتراک دو

مجموعه A و B می‌نامیم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم که خوانده می‌شود: اشتراک A و B

اشتراک دو مجموعه A و B به زبان ریاضی عبارت است از: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ و } x \in B\}$ در نمودار مقابل قسمت رنگی، اشتراک دو مجموعه A و B را نشان می‌دهد.



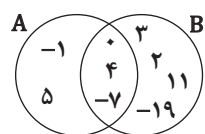
تعریف: اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای که اعضای آن شامل همه اعضای دو مجموعه A و B است

را اجتماع دو مجموعه A و B می‌نامیم و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم که خوانده می‌شود: اجتماع A و B

تعریف دیگر: اجتماع دو مجموعه A و B شامل عضوهایی است که یا در A باشند یا در B

تعریف دیگر: اجتماع دو مجموعه A و B شامل عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B باشند.

اجتماع دو مجموعه A و B به زبان ریاضی عبارت است از: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$ ، در نمودار بالا قسمت رنگی، اجتماع دو مجموعه A و B را نشان می‌دهد.



مثال ۱: باتوجه به نمودار مقابل مجموعه‌های A ، B و سپس $A \cap B$ و $A \cup B$ را با اعضایشان تشکیل دهید.

پاسخ: $A = \{0, -1, 5, 4, -7\}$ و $B = \{0, 2, 3, 4, -7, 11, -19\}$

$A \cap B = \{0, 4, -7\}$ و $A \cup B = \{0, -1, 5, 2, 3, -7, -19, 11\}$

مثال ۲: اگر $C = \{a \text{ و } e \text{ و } i \text{ و } o \text{ و } u\}$ و $D = \{a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d \text{ و } e \text{ و } f\}$ باشند، مجموعه $C \cup D$ و $C \cap D$ را با اعضایشان تشکیل دهید.

پاسخ: $C \cap D = \{a \text{ و } e\}$ و $C \cup D = \{a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d \text{ و } e \text{ و } f \text{ و } i \text{ و } o \text{ و } u\}$

مثال ۳: اگر $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$ و $B = \{2k | k \in \mathbb{Z} \text{ و } -4 < k < 4\}$ باشند:

الف) مجموعه‌های A ، B ، $A \cap B$ و $A \cup B$ را با اعضایشان تشکیل دهید.

$A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5\}$ و $B = \{-6 \text{ و } -4 \text{ و } -2 \text{ و } 0 \text{ و } 2 \text{ و } 4 \text{ و } 6\}$

$A \cap B = \{2 \text{ و } 4\}$ = مجموعه اعدادی که در هر دو مجموعه هستند.

$A \cup B = \{-6 \text{ و } -4 \text{ و } -2 \text{ و } 0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 6\}$ = مجموعه اعدادی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B هستند.

ب) مجموعه‌های $A \cap B$ و $A \cup B$ را به زبان ریاضی بنویسید.

$A \cap B = \{2k | k \in \mathbb{N} \text{ و } k < 3\}$ و $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} | -6 \leq x \leq 6 \text{ و } x \neq -1 \text{ و } -3 \text{ و } -5\}$